COLLEGE TOEGEPASTE ANALYSE

DEEL I

W. Eckhaus

Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
te Utrecht.

INHOUD

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Grondbegrippen

Tenzij anders vermeld, zijn in het vervolg alle variabelen en functies reëel.

Zij D en G open intervallen van de reële rechte, F een gegeven functie $(x,y) \to F(x,y)$, $x \in D$, $y \in G$.

Zij voorts V de verzameling continu differentieerbare functies $x \to y(x)$, $x \in D$(d.w.z. $V = C^1(D)$). Wij formuleren het volgende probleem: Bepaal een element $y \in V$ zodanig dat

$$(\forall x \in D) \qquad \frac{d\,y(x)}{dx} = F(x,y(x)).$$

De uitdrukking

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

noemen wij een differentiaalvergelijking (van de eerste orde).

Een functie $y(x)$ die voldoet aan de eisen van ons probleem noemen wij een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Probleemstelling zoals boven gegeven kan op verschillende manieren worden gegeneraliseerd.

Enerzijds, kunnen wij n-de orde differentiaalvergelijkingen bestuderen. Er wordt dan gevraagd functies $y(x) \in {}^{n}(D)$ te bepalen die voldoen aan

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots\ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

waarbij F wederom een gegeven functie is.

Anderzijds kunnen wij stelsels van eerste orde vergelijkingen onderzoeken. Men vraagt dan naar stelsels van functies $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots y_n(x)$ die voldoen aan

$$\frac{dy_1}{dx} = F_1(x,y_1,\dots .y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = F_2(x,y_1,\dots .y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = F_n(x,y_1\dots .y_n)$$

In dit college zullen wij ons hoofdzakelijk beperken tot $n = 1$ en $n = 2$.

Er bestaat een nauw verband tussen hogere orde diff.vergelijkingen en stelsels van eerste orde vergelijkingen. Dit kunnen wij inzien als volgt.

Beschouw

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x,y,\frac{dy}{dx})$$

Definieer

$$y = y_1 \ ; \ \frac{dy}{dx} = y_2$$

Er ontstaat dan een stelsel

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = F(x,y_1,y_2).$$

Wij noemen het stelsel eerste orde diff.vergelijkingen lineair, indien

$$F_i(x,y_1,\dots y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x).y_j + b_i(x) \ ; \ i = 1,\dots .,n$$

Het stelsel is niet-lineair als aan de eisen van lineariteit niet is voldaan. Een n-de orde differentiaalvergelijking is

is lineair als het corresponderende stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen lineair is.

Het beginwaarde-probleem

In toepassingen zijn de functies y, of $y_1 \ldots y_n$, vaak te interpreteren als grootheden die de toestand van een systeem beschrijven, terwijl in de differentiaalvergelijkingen de wetten zijn geformuleerd volgens welke het systeem functioneert. Veelal is de toestand voor zeg $x = x_0$ bekend en men wenst te bepalen hoe de toestand voor $x \neq x_0$ zal zijn. Er ontstaat aldus het zogenaamde beginwaarde-probleem :

n = 1 Bepaal y(x) zodanig dat

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \; : \; y(x_0) = y^0$$

n = 2 A. Bepaal $y_1(x), y_2(x)$ zodanig dat

$$\frac{dy_1}{dx} = F_1(x,y_1,y_2)$$

$$y_1(x_0) = y_1^0 \; ; \; y_2(x_0) = y_2^0$$

$$\frac{dy_2}{dx} = F_2(x,y_1,y_2)$$

n = 2 B. Bepaal y(x) zodanig dat

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x,y,\frac{dy}{dx}) \; ; \; y(x_0) = y_2^0 \; ; \; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = y_2^0$$

Het is à priori niet zeker dat een beginwaarde-probleem een oplossing bezit. Beschouw als voorbeeld

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

zij $0 \leqslant x < \xi$; $y(0) = 1$.

Het is eenvoudig in te zien dat alle functies die aan de differentiaalvergelijkingen voldoen gegeven zijn door

$$y(x) = \ln x + c$$

maar in deze familie van functies is er geen die voldoet aan $y(0) = 1$.

Anderzijds, zo er oplossingen bestaan, moet men de vraag stellen hoeveel er bestaan. Uit het oogpunt van toepassingen op deterministische systemen zou men wensen dat er slechts één oplossing bestaat. Maar niet alle differentiaalvergelijkingen vervullen deze eis.

Beschouw bijvoorbeeld

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \ ; \ 0 \leqslant x < 1 \ ; \ y(0) = 0$$

Er voldoen twee oplossingen, te weten

$$y(x) = 0 \text{ en } y(x) = x^2.$$

Wij formuleren nu, voor $n = 1$, een algemene existentie en eenduidigheid stelling.

Definitie. De functie $F(x,y)$, $x \in D$; $y \in G$, heet Lipschitz continu t.a.v. y in $D \times G$ als er een constante λ bestaat zodanig dat

$$(\forall\, x \in D)\ (\forall\, y^{(1)} \in G)(\forall\, y^{(2)} \in G) :$$

$$|F(x,y^{(1)}) - F(x,y^{(2)})| \leqslant \lambda |y^{(1)} - y^{(2)}|.$$

Stelling. Zij $F(x,y)$ continu t.a.v. x en Lipschitz continu t.a.v. y in $D \times G$.

Voor elke $y^0 \in G$ bezit het probleem

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \ ; \ y(x_0) = y^0$$

één en slechts één oplossing $y(x)$, gedefinieerd in een interval $|x - x_0| \leqslant L, L > 0$

Opmerkingen. Bewijs van deze stelling zullen wij in een later paragraaf schetsen. De stelling is gemakkelijk uit te breiden tot stelsel met $n \geqslant 2$, er moeten dan aan elke $F_i, i = 1,\ldots,n$ analoge eisen worden gesteld. Wij verwijzen hiertoe naar het college "grondslagen van differentiaalvergelijkingen".

Enkele elementair integreerbare vergelijkingen.

Bij de studie van differentiaalvergelijkingen is een aantal elementair oplosbare classen niet alleen een zinvol uitgangspunt, maar ook een bijzonder nuttig hulpmiddel bij verdere onderzoekingen.

I. De autonome vergelijking van de eerste orde.

Een vergelijking van eerste orde heet autonoom als zij de gedaante heeft

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Zij nu y_0 zodanig dat $g(y_0) \neq 0$. Wij definiëren

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dn}{g(n)}$$

$$\frac{d}{dx} G[y(x)] = \frac{1}{g[y(x)]} \frac{dy(x)}{dx}$$

Als $y(x)$ oplossing is van de differentiaalvergelijking, dan geldt

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = 1$$

waaruit volgt $G(y(x)) = x + c$

met c een willekeurige constante.

Wij hebben aldus een relatie gevonden tussen y en x. Hieruit

moet alsnog $y(x)$ expliciet worden bepaald.

Voorbeeld : $$\frac{dy}{dx} = y$$

$$G(y) = \ln \frac{y}{y_0} \; ; \; \ln \frac{y(x)}{y_0} = x + c$$

Als $y(x_0) = y_0$ dan is $c = -x_0$. Invoeren van inverse functie levert uiteindelijk

$$y(x) = y_0 \; e^{(x-x_0)} \; .$$

II. <u>De vergelijking met gescheiden variabelen.</u>

Wij beschouwen nu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\; g(y)$$

Zij $$\xi = \int_{x_0}^{x} f(x^1)dx^1$$

Er volgt onmiddelijk

$$\frac{dy}{d\xi} = g(y)$$

De vergelijking kan nu worden opgelost als onder I. De algemene relatie tussen y en x is :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dn}{g(n)} = \int_{x_0}^{x} f(x^1)\; dx^1 + c$$

Door deze relatie is y impliciet als functie van x gegeven in een omgeving van x_0.

(Ga na).

III. <u>De lineaire inhomogene vergelijking</u>

De lineaire vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = f(x).y + \phi(x)$$

noemt men inhomogeen als $\phi \neq 0$. De vergelijking is niet van het type van gescheiden variabelen.

Wij passen toe de volgende transformatie (genaamd "variatie van constante") :

$$y(x) = \eta(x).\theta(x)$$

met $\eta(x)$ een oplossing van het homogene probleem

$$\frac{d\eta}{dx} = f(x).\eta$$

Wij kiezen

$$\eta(x) = \exp \{\int_{x_0}^{x} f(x^1)dx^1\}$$

Invullen levert :

$$\eta(x) \frac{d\theta}{dx} = \phi(x)$$

En bijgevolg $\theta(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\phi(x^1)}{\eta(x^1)} dx^1 + c.$

IV <u>Lineaire homogene stelsels met constante coëfficiënten.</u>

Beschouw $\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \qquad i = 1,....; n$

waarbij a_{ij} constanten zijn. Als $n = 1$ dan zijn de oplossingen exponentiële functies. Het lijkt de moeite waard te onderzoeken of exponentiële functies ook oplossingen kunnen zijn voor $n > 1$.

Stel daarom $y_i(x) = c_i e^{\lambda x}, \ i = 1,...., n$

Er zou dan moeten gelden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - \lambda c_i = 0 \quad , i = 1,...., n$$

Dit stelsel lineaire algebraische vergelijkingen voor $c_1,....c_n$ bezit niet triviale oplossingen als het coëficiënten determinant gelijk nul is.

Voor $n = 2$ vinden wij aldus :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dit is de eigenwaardevergelijking behorende bij de coëfficiënten matrix (a_{ij}). De wortels van de resulterende tweedegraads vergelijking voor λ bepalen de gezochte exponentiële functies.

Locaal onderzoek : iteratie en reeksontwikkeling

Beschouw nu, voor n = 1, het algemene probleem

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \; : \; y(x_0) = y_0$$

Het probleem kan equivelent worden geformuleerd als de integraalvergelijking

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F[\xi, y(\xi)]\,d\xi$$

Volgens het iteratie proces (van Picard) definiëren wij een rij functies

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F[\xi, y_{n-1}(\xi)]\,d\xi \; ; \; n \geq 1$$

Het proces is constructief, d.w.z. elke $y_n(x)$ kan worden berekend. De hoop en de verwachting is dat $y_n(x)$ convergeert (als $n \to \infty$) en wel naar de functie $y(x)$.

De rij $y_n(x)$ kan (op een nagenoeg triviale manier) worden geïdentificeerd met

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{p=1}^{n}{}' \{y_p(x) - y_{p-1}(x)\} \; ; \quad n \geq 1$$

Wij onderzoeken nu de convergentie van de reeks, die ontstaat als $n \to \infty$.

Beschouw (om de gedachten te bepalen) $x \geq x_0$.

$$|y_p(x) - y_{p-1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |F[\xi, y_{p-1}(\xi)] - F[\xi, y_{p-2}(\xi)]|\,d\xi, p \geq 2.$$

Wij veronderstellen :

F(x,y) continu in D X G, en in het bijzonder Lipschitz continu t.a.v. y.

$x_0 \in D$; $y_0 \in G$.

Wij merken op dat, voor alle n, $y_n(x)$ continue functies zijn met $y_n(x_0) = y_0$. Bijgevolg bestaat er een interval $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_1 > x_0$, zodanig dat $y_n(x) \in G$. Toepassing van Lipschitz continuïteit levert in $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$;

$$|y_p(x) - y_{p-1}(x)| \leqslant \lambda \int_{x_0}^{x} |y_{p-1}(\xi) - y_{p-2}(\xi)|d\xi \; ; \; p \geqslant 2.$$

Merk nog op dat

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |F(\xi,y_0)|d\xi \leqslant M(x-x_0)$$

waarbij M een constante.

Met volledige inductie vindt men:

$$|y_p(x) - y_{p-1}(x)| \leqslant \frac{M}{\lambda} \frac{[\lambda(x-x_0)]^p}{p!}$$

Er volgt dat de termen van de reeks

$$\sum_{p=1}^{n} \{y_n(x) - y_{p-1}(x)\}$$

in absolute waarde term voor term worden gemajoreerd door termen van een convergente reeks. Bijgevolg convergeert $y_n(x)$ en wel gelijkmatig in elk interval $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ waarvoor geldt dat $y_n(x) \in G$. Er kan nu nog worden aangetoond dat inderdaad $\lim_{n\to\infty} y_n$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Aldus is constructief existentie van oplossingen aangetoond.

Zij nu $\tilde{y}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$. Om de eenduidigheid van ons probleem te onderzoeken stellen wij dat $\zeta(x)$ een andere functie is die voldoet.

Met afschatting analoog aan het voorgaande vinden wij :

$$|y_n(x) - \zeta(x)| \leqslant \lambda \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(\xi) - \zeta(\xi)|d\xi \quad ; n \geqslant 1$$

$$|y_0(x) - \zeta(x)| \leqslant M(x-x_0)$$

Er volgt :

$$|y_n(x) - \zeta(x)| \leqslant \frac{M}{\lambda} \frac{[\lambda(x-x_0)]^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dus: $\lim_{n\to\infty} |y_n(x) - \zeta(x)| = |\tilde{y}(x) - \zeta(x)| = 0,$

d.w.z. $\zeta(x)$ is identiek met $\tilde{y}(x)$.

Het bovenstaande iteratie proces, en bewijs van convergentie, kan worden uitgebreid tot stelsels van willekeurig vele eerste orde differentiaalvergelijkingen. Aldus is zowel een theoretische basis voor de beginwaarde problemen gelegd, als een practische mogelijkheid geschapen om de oplossingen te construeren. Echter, in toepassingen zijn de practische mogelijkheden van het constructief proces nogal beperkt.

In het algemeen is het berekenen van y_n voor grote waarden van n zeer moeizaam en arbeidsintensief, terwijl de uitkomsten onoverzichtelijk zijn, zodat men gedragingen van y(x) nauwelijks nog kan onderzoeken.

Practisch gesproken is het constructief proces in het algemeen slechts bruikbaar voor locaal onderzoek, d.w.z. $|x-x_0|$ klein. Dan convergeert y_n snel, en met n niet al te groot kan al een redelijke benadering van y worden gegeven.

Het analyseren van de oplossingen van differentiaalvergelijkingen in grotere intervallen $x_0 \leqslant x < d$ (in gevallen die niet elementair oplosbaar zijn) blijkt dan ook een voortdurende uitdaging voor de toegepast wiskundige.

Autonome stelsels. Baankrommen in het fasevlak.

Voor een classe van de zogenaamde autonome differentiaalvergelijkingen is het mogelijk met speciale methoden het gedrag van de oplossingen te analyseren.

Wij beschouwen het stelsel

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1,y_2) \ ; \ \frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1,y_2)$$

f_1 en f_2 voldoen aan de eisen van de existentie- en eenduidigheid stelling.

Zij $y_1(x)$, $y_2(x)$ een paar functies die voldoen.

Men verifieert gemakkelijk het volgende

Als $y_1(x)$, $y_2(x)$ voldoet, dan voldoet ook $y_1(\xi),y_2(\xi)$, met $\xi = x - x_0$, x_0 willekeurig (maar vast).

Wij gaan nu het gedrag van de oplossingen van het stelsel onderzoeken in het y_1-y_2 vlak, dat wij het <u>fasevlak</u> noemen.

Elk paar niet constante functies $y_1(x),y_2(x)$ die aan de differentiaalvergelijking voldoet definieert in het fasevlak een verzameling punten die wij een <u>baankromme</u> noemen.

De existentie- en eenduidigheid-stelling voor oplossingen van beginwaarde problemen laat zich vertalen als volgt :

<u>Stelling</u> : Door elk punt $y_1,y_2 \in G$ gaat één en slechts één baankromme.

Er kunnen in G punten voorkomen met speciale en uitzonderlijke eigenschappen.

<u>Definitie</u>: (η_1,η_2) heet een singulier punt (of kritiek punt, of stationair punt) als $f_1(\eta_1,\eta_2) = f_2(\eta_1,\eta_2) = 0$.

<u>Eigenschap</u>: Zij (η_1,η_2) een singulier punt (in G).
Als $y_1(x_0) = \eta_1$, $y_2(x_0) = \eta_2$, dan geldt voor alle x
$y_1(x) = \eta_1$, $y_2(x) = \eta_2$.

Opmerking : Een singulier punt is dus een baankromme die tot één punt is gedegenereerd.

Buiten de singuliere punten kan een differentiaalvergelijking voor de baankrommen worden opgesteld.

Het is eenvoudig in te zien dat geldt :

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2(y_1,y_2)}{f_1(y_1,y_2)}$$

Onderzoek van baankrommen in het fasevlak heeft twee belangrijke aspecten. Enerzijds kan soms de differentiaalvergelijking van de baankrommen tot een gemakkelijk integreerbaar type behoren. Anderzijds, in het meest algemene geval, kan daar zogenaamd kwalitatief onderzoek, vergaand inzicht worden verkregen in het gedrag der oplossingen. Wij bespreken hier het tweede aspect.

De differentiaalvergelijking der baankrommen definieert in het fasevlak een richtingsveld, d.w.z. : in elk punt y_1,y_2 is de helling van de baankromme die door dit punt gaat gegeven.

De richting waarin een punt $y_1(x),y_2(x)$ langs een baankromme "beweegt" voor bijv. toenemende x kan nog uit de oorspronkelijke differentiaalvergelijking van het stelsel worden afgeleid.

Men kan nu proberen bij benadering de baankrommen te schetsen door in het richtingsveld "zo goed mogelijk passende" krommen te construeren.

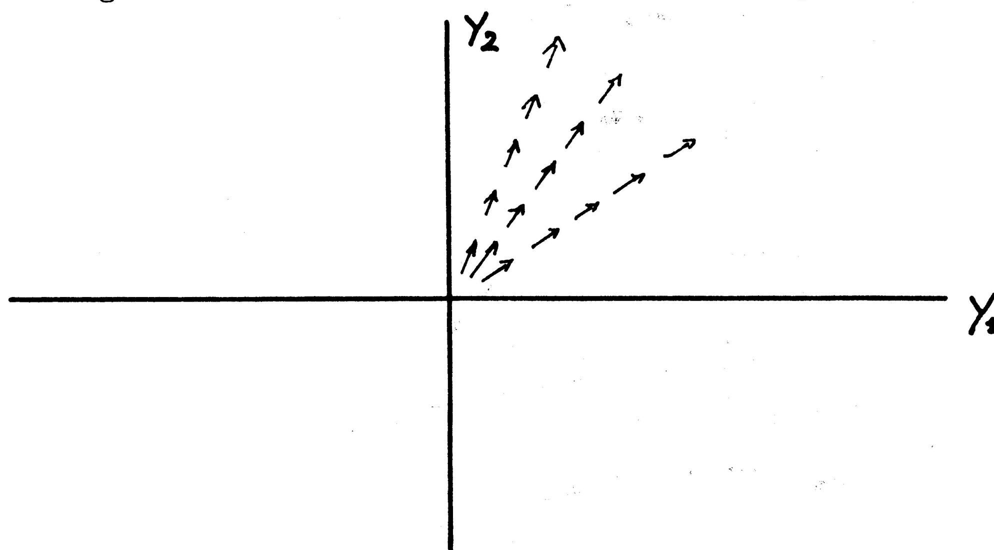
Als een nagenoeg triviale illustratie van boven beschreven procedure beschouw

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \quad ; \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2$$

Er is één singulier punt: $y_1 = y_2 = 0$. De vergelijking van de baankrommen is

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

Richtingsveld is in onderstaande schets aangegeven.



Het is evident dat "zo goed mogelijk passeerde" krommen rechte lijnen zijn; dit zijn in dit geval ook de exacte oplossingen van de vergelijking voor baankrommen.

Beschouw thans, als een meer serieuse toepassing, het stelsel

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1(1-y_2) \quad ; \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_2(1-y_1)$$

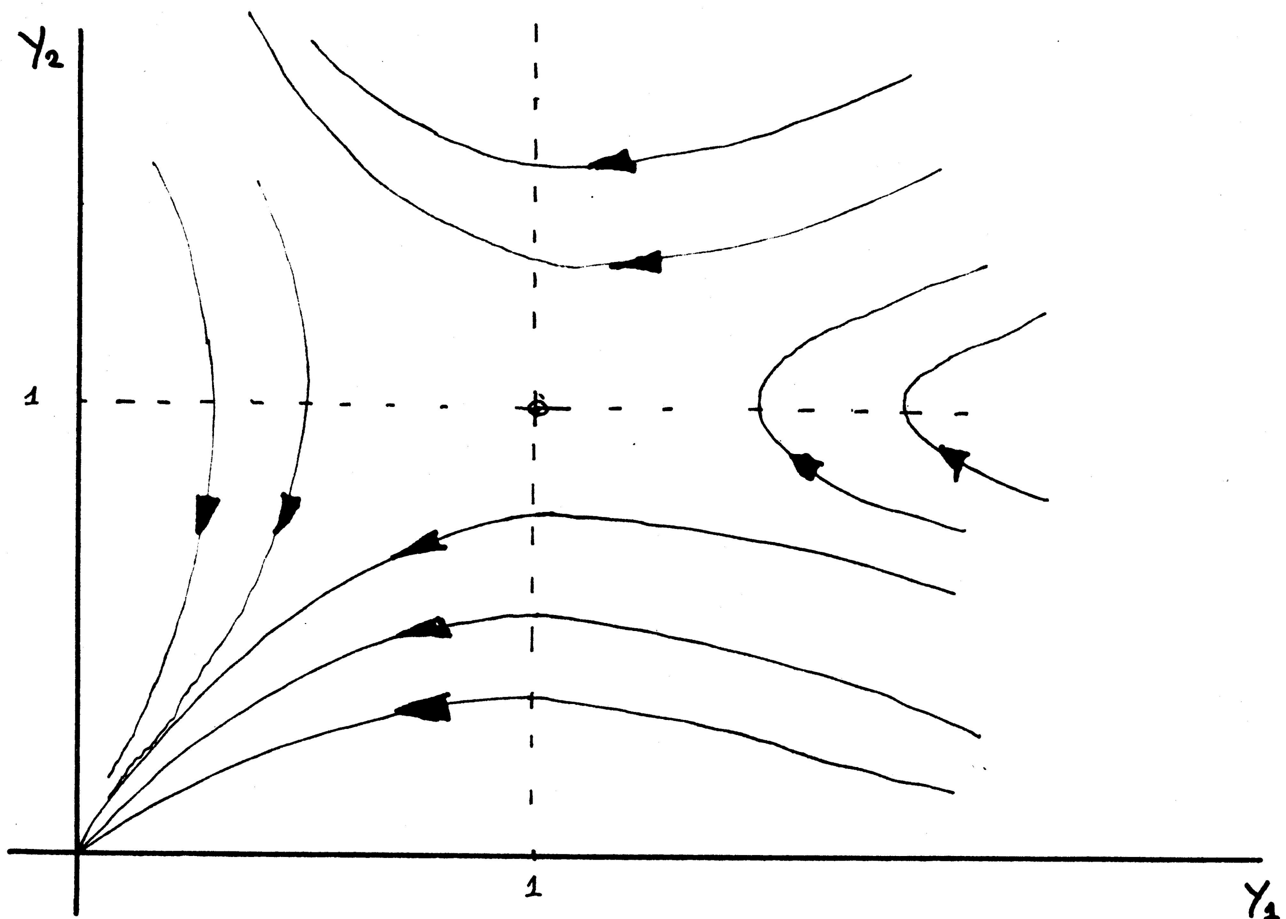
Er zijn twee singuliere punten, te weten

$$y_1 = y_2 = 0 \quad ; \quad y_1 = y_2 = 1.$$

De vergelijking van de baankrommen is

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2(1-y_1)}{y_1(1-y_2)}$$

Men ga na dat het kwalitatief onderzoek een "faseportret" van de oplossingen oplevert, zoals in nu volgende schets gegeven (pijltjes geven aan "beweging" voor toenemende x).



Wij merken op dat de vergelijking van de baankrommen van het type van gescheiden variabelen is. Men kan dus, volgens het eerder besprokene, integreren, maar uit het resultaat is in dit geval bijzonder moeilijk y_2 expliciet in y_1 uit te drukken.

De lineaire vergelijking van tweede orde.

We beschouwen nu de lineaire vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0$$

Op een wijze die eerder was aangegeven kunnen wij met deze vergelijking associëren het stelsel

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \quad ; \quad \frac{dy_2}{dx} = -b(x)y_2 - c(x)y_1$$

Zij nu b(x) en c(x) continu en begrensd voor $x \in D$. Dan zijn de rechterleden van het stelsel Lipschitz-continu t.a.v. y_1 en y_2 op de gehele reële rechte, en aan de eisen van existentie- en eenduidigheid-stelling voor beginwaarde problemen is voldaan. Wij definiëren twee speciale oplossingen $\phi(x)$ en $\psi(x)$ voor de differentiaalvergelijking als volgt

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\phi = 0 \qquad \phi(x_0) = 1, \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + b\frac{d\psi}{dx} + c\psi = 0 \qquad \psi(x_0) = 0, \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=x_0} = 1.$$

Een willekeurig beginwaarde probleem wordt nu opgelost door

$$y(x) = A\,\psi(x) + B\,\psi(x)$$

waarbij $y(x_0) = A$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = B$.

Anderzijds, met A en B willekeurig, stelt de uitdrukking hierboven de verzameling van alle functies voor die aan de differentiaalvergelijking voldoen. Een dergelijke uitdrukking noemt men de algemene oplossing.

Opmerking: Dat er inderdaad geen andere functies bestaan die aan de differentiaalvergelijking voldoen wordt aangetoond door de nu volgende overweging: stel een functie u(x) voldoet aan de differentiaalvergelijking. Men kan dan uitrekenen $u(x_0) = \alpha$; $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0} = \beta$. Echter de functie

$$\alpha\phi(x) + \beta\psi(x)$$

voldoet eveneens aan de differentiaalvergelijking en aan dezelfde beginwaarden. Wegens eenduidigheid volgt

$$u(x) = \alpha\phi(x) + \beta\psi(x)$$

d.w.z. u(x) is bevat in de algemene oplossing.

Het randwaardeprobleem.

Wij formuleren nu een nieuw probleem voor de tweede-orde differentiaalvergelijking :

Bepaal een oplossing $y(x)$ in $x_0 \leqslant x \leqslant x$, zodanig dat

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y(x_1) = y_1$$

waarbij y_0 en y_1 voorgeschreven waarden zijn. Een dergelijk probleem wordt een <u>randwaardeprobleem</u> genoemd. Randwaardeproblemen komen in toepassingen zeer veelvoudig voor.

Als uitgangspunt van de analyse nemen wij de algemene oplossing

$$y(x) = A\ \phi(x) + B\ \psi(x)$$

Blijkbaar moet voor een oplossing van het randwaardeprobleem gelden

$$A\ \phi(x_0) + B\ \psi(x_0) = y_0$$

$$A\ \psi(x_1) + B\ \psi(x_1) = y_1$$

Dit stelsel van twee lineaire algebraische vergelijkingen voor A en B is, in het geval dat y_0 en y_1 niet beide nul zijn, eenduidig oplosbaar dan en slechts dan, als

$$D = \begin{vmatrix} \phi(x_0) & \psi(x_0) \\ \phi(x_1) & \psi(x_1) \end{vmatrix} \neq 0$$

Het blijkt aldus dat existentie en eenduidigheid van oplossingen van het randwaardeprobleem gebonden is aan een conditie. Om deze nader te interpreteren beschouwen wij nog nader een speciaal randwaardeprobleem, waarin wij eisen

$$y(x_0) = 0 \quad ; \quad y(x_1) = 0$$

Men vindt nu gemakkelijk dat voor dit speciale probleem niet triviale oplossingen bestaan dan en slechts dan, als $D = 0$.
Wij vatten onze resultaten als volgt samen :

Definitie: Het randwaardeprobleem heet homogeen als
$y(x_0) = y(x_1) = 0$.

Stelling (Alternatief van Fredholm).
Of het inhomogene randwaardeprobleem bezit een eenduidige oplossing, of het homogene randwaardeprobleem bezit een triviale oplossing.

Als voorbeeld, en ter nadere toelichting, beschouwen wij de eenvoudige differentiaalvergelijking :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad ; \quad \lambda > 0 \ .$$

Zij $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$.

Met de eerder beschreven methode voor lineaire stelsels met constante coëficiënten (of eenvoudig door substitutie) vinden wij dat functies

$$e^{i\sqrt{\lambda}\,x} \ , \quad e^{-i\sqrt{\lambda}\,x}$$

voldoen aan de differentiaalvergelijking. Door lineair te combineren schrijven wij

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda}\,x + B \sin \sqrt{\lambda}\,x \ .$$

Er moet gelden

$$A = y_0$$

$$A \cos \sqrt{\lambda} + B \sin \sqrt{\lambda} = y_1$$

Nu is $D = \sin \sqrt{\lambda}$

Als $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$ (d.w.z. $\sqrt{\lambda} \neq m\pi$) dan kunnen wij eenduidig oplossen

$$B = \frac{y_1 - y_0 \cos\sqrt{\lambda}}{\sin\sqrt{\lambda}}$$

Blijkbaar $y_0 = y_1 = 0 \Rightarrow A = B = 0$, d.w.z. het homogene probleem heeft geen niet triviale oplossingen.
Als nu $\sqrt{\lambda} = m\pi$, dan is het duidelijk dat de functie $B \sin m\pi x$, met B een willekeurige constante, oplossing is van het homogene randwaardeprobleem. Het inhomogene randwaardeprobleem bezit in het algemeen geen oplossingen, maar uitzonderingen kunnen zich voordoen, met name als toevallig $y_0 \cos m\pi = y_1$.
Bijvoorbeeld, als $\lambda = \pi^2$ en $y_0 = -y_1$ dan voldoet de functie

$$y_0 \cos \pi x$$

aan alle eisen van het randwaardeprobleem.
Echter,de functie

$$y_0 \cos \pi x + B \sin \pi x$$

voldoet eveneens, en wel voor alle B. De oplossing is dus niet eenduidig. Men ga na dat dit in overeenstemming is met de uitspraken van de alternatief voor Fredholm.

VARIATIONELE PROBLEMEN

Inleiding.

De benamingen "variatierekening", "variationele formulering", "variationeel principe" etc. hebben hun oorsprong in de mechanica. Men vond dat vele problemen op twee nagenoeg equivalente wijzen konden worden geformuleerd: door middel van differentiaalvergelijkingen of als opgave een functie te vinden die een bepaalde uitdrukking (een functionaal) minimaliseert. Voor sommige problemen was de tweede formulering zelfs natuurlijker dan de eerste. Bijvoorbeeld:

Men verbindt twee punten A en B in het verticale vlak met een buis en laat onder invloed van zwaartekracht een stoffelijk punt van A naar B bewegen (A ligt hoger dan B, wrijving wordt verwaarloosd). Men vraagt de vorm van de buis zodanig te bepalen dat de beweging in de kortst mogelijke tijd plaats vindt. Deze opgave wordt door toepassing van de wetten der mechanica vertaald als volgt:
Bepaal een differentieerbare functie $x \rightarrow y(x)$ zodanig dat

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'(x)}}{\sqrt{y(x)}}\, dx$$

een minimum aanneemt. Hierbij zijn x_1 en x_2 gegeven en wordt geëist dat $y(x_1)$ en $y(x_2)$ voorgeschreven waarden aannemen.

De moderne variatierekening houdt zich bezig met het bepalen van extrema van functionalen gedefinieerd op vector ruimten. De ontwikkeling werd gestimuleerd door twee oorzaken:
1. In vele problemen van de toegepaste wiskunde is de opgave

om funktionalen van allerlei aard te minimalizeren de natuurlijke formulering. Bijvoorbeeld in de problematiek van zogenaamde optimale besturing van processen (optimal control).

2. "Variationele aanpak" bleek ook vruchtbaar te zijn voor problemen geformuleerd door middel van differentiaalvergelijkingen.

Het elementaire variatie probleem.

In wat volgt zijn alle grootheden reëel. Zij D een gesloten interval $D = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$. V(D) is een nader te preciseren verzameling functies $x \rightarrow y(x)$ die een lineaire ruimte vormen en die voorzien is van een norm. Zij nu F een gegeven functie $(x,y,z) \rightarrow F(x,y,z)$, wij beschouwen de uitdrukking

$$J(y) = \int_a^b F(x,y(x), y'(x))\, dx$$

Aan elk element $y \in V(D)$ wordt aldus een reëel getal J(y) toegevoegd. Wij noemen J een functionaal op V(D).

De opgave is nu als volgt:

Bepaal $y_0 \in V(D)$ zodanig dat voor elke $y \in V(D)$ geldt

$$J(y_0) \leqslant J(y).$$

De existentie van zulk een element $y_0 \in V(D)$ moet uiteraard nog worden aangetoond.

In het bovenstaande is al stilzwijgend aangenomen dat y differentieerbaar is. Voorts kunnen nog verschillende "nevenvoorwaarden" op y worden opgelegd die in het nader preciseren van V tot uitdrukking zullen komen. Wij zullen hier zogenaamde "randvoorwaarden" opleggen.

Wij hebben al gezien dat men "randvoorwaarden" kan hebben van het type: y(a) en y(b) gegeven. Ook is het denkbaar dat y(a) en y'(a) voorgeschreven zijn, of dat y'(a) en y'(b) zijn voorgeschreven.

In al deze gevallen kan het probleem worden gereduceerd tot zogenaamde "homogene" (of "nul") randvoorwaarden, als volgt:

Om de gedachten te bepalen, zij

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta \text{ voorgeschreven.}$$

Zij $U \in V$ een willekeurig gekozen functie zodanig dat $U(a) = \alpha$ en $U(b) = \beta$.

Zij nu $\bar{y}(x) = y(x) - U(x)$.

$$J(y) = \int_a^b F(x,\bar{y}+U,\bar{y}'+U')dx = \int_a^b \bar{F}(x,\bar{y},\bar{y}')dx = \bar{J}(\bar{y})$$

Wij zoeken $\bar{y}_0 \in V$ zodanig dat $\bar{y}_0(a) = \bar{y}_0(b) = 0$ en

$$\bar{J}(\bar{y}_0) \leqslant \bar{J}(\bar{y})$$

voor alle $\bar{y} \in V$ waarvoor geldt $\bar{y}(a) = \bar{y}(b) = 0$.

Wij kunnen dus het probleem beperken tot

$$\bar{y} \in \bar{V} \subset V$$

$$\bar{V}(D) = \{\bar{y} | \bar{y} \in V(D); \bar{y}(a) = \bar{y}(b) = 0\}$$

In wat nu volgt wordt het probleem verondersteld homogeen te zijn gemaakt op boven beschreven wijze, en de "bovenstreping" van alle symbolen verder achterwege gelaten.

De eerste variatie.

Wij vatten nogmaals het probleem samen:

Bepaal $y_0 \in V$ zodanig dat voor elk $y \in V$ geldt:

$$J(y_0) \leqslant J(y)$$

$$J(y) = \int_a^b F(x,y(x), y'(x)dx.$$

De vraag is nu: hoe kan men zulk een element $y_0 \in V$ opsporen? Wij putten de inspiratie uit een aanzienlijk eenvoudiger probleem: het bepalen van extreme waarden van een <u>functie</u> $f(x)$ gedefinieerd op zeg $a \leqslant x \leqslant b$. Als f differentieerbaar is dan geldt in een eenvoudig extremum $f'_{(x)} = 0$.

Het opleggen van deze noodzakelijke voorwaarde leidt meestal tot bepalen langs eenvoudige weg van de waarden van x waarvoor extreme waarden kunnen optreden.

Wij keren nu terug tot onderzoek van J(y).

Schrijf $y = y_0 + \tau\eta$ waarbij η een willekeurig element van V is en τ een reëel getal, zeg $-\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. Voor elke η wordt nu een reële functie $I(\tau)$ gedefinieerd door

$$I(\tau) = J(y_0 + \tau\eta)$$

Kennelijk moet $I(\tau)$ een minimum bezitten voor $\tau = 0$. Als $I(\tau)$ differentieerbaar is, dan geldt:

$$\{J(y_0) \leqslant J(y),\ \forall y \in V\} \Rightarrow \{(\frac{dI(\tau)}{d\tau})_{\tau=0} = 0, \forall\eta \in V\}$$

We veronderstellen nu

F(x,y,z) is differentieerbaar naar y en z (de afgegeleiden duiden wij aan met F_y, resp. F_z).

Wij hebben:

$$J(y_0+\tau\eta) = \int_a^b F(x, y_0(x)+\tau\eta(x),\ y_0'(x)+\tau\eta'(x))dx$$

Voor elke $\eta \in V(\eta)$ vinden wij:

$$\frac{dI(\tau)}{d\tau} = \int_a^b \{F_y(x,y_0(x)+\tau\eta(x),\ y_0'(x)+\tau\eta'(x)) \cdot \eta(x) +$$

$$+ F_z(x,y_0(x)+\tau\eta(x),\ y_0'(x)+\tau\eta'(x)) \cdot \eta'(x)\}dx$$

Dus:

$$(\frac{dI(\tau)}{d\tau})_{\tau=0} = \langle J'(y_0), \eta\rangle$$

waarbij wij als afkorting hebben ingevoerd

$$\langle J'(y_0),\eta\rangle = \int_a^b \{F_y(x,y_0(x),\ y_0'(x)) \cdot \eta(x) +$$

$$+ F_z(x,y_0(x),\ y_0'(x)) \cdot \eta'(x)\}dx$$

Men schrijft ook vaak formeel

$$\delta J = \langle J'(y_0), \eta \rangle \cdot \delta$$

en noemt δJ "de eerste variatie van J".

Samenvattend hebben wij gevonden:

Als $F(x,y,z)$ differentieerbaar is naar y en z dan geldt:

$$\{J(y_0) \leqslant J(y), \forall y \in V\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\langle J'(y_0), \eta\rangle = 0 \ \forall \eta \in V\}.$$

De vergelijking van Euler.

Door invoeren van verdere hypothesen kan het variatieprobleem worden teruggebracht tot een randwaardeprobleem voor een differentiaalvergelijking.

Veronderstel dat

$$\frac{d}{dx} F_z(x,y_0(x), y_0'(x))$$

bestaat en continu is op [a,b]. Wij kunnen in δJ partieel integreren en er volgt:

$$\langle J'(y_0), \eta\rangle = \int_a^b Ly_0(x) \cdot \eta(x)dx, \ \forall\eta \in V$$

waarbij:

$$Ly_0 = F_y(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx} F_z(x,y_0,y_0')$$

We veronderstellen verder, dat V de continue funktie op [a,b] bevat.
Men maakt nu gebruik van:

Lemma (Lagrange)

Zij $u(x)$ een continue functie op [a,b] en zodanig dat voor elke continue functie $\nu(x)$ met $\nu(a) = \nu(b) = 0$ geldt

$$\int_a^b u(x)\ \nu(x)\ dx = 0$$

dan geldt: $u(x) = 0, \ \forall x \in [a,b]$

Dus, $y_0(x)$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$Ly_0 = 0$$

(met randvoorwaarden $y_0(a) = y_0(b) = 0$.)

$Ly_0 = 0$ wordt de (bij het variatieprobleem behorende) vergelijking van Euler genoemd.

Wij onderzoeken nu nader de gemaakte veronderstellingen. Formeel differentiëren levert:

$$\frac{d}{dx} F_z(x,y_0(x), y_0'(x)) =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \frac{dy_0}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cdot \frac{d^2 y_0}{dx^0}$$

waarbij men telkens voor F moet lezen $F(x,y_0(x), y_0'(x))$.
Dus, de veronderstelling dat $\frac{d}{dx} F_z(x,y_0(x), y_0'(x))$ bestaat en continu is op $[a,b]$ impliceert dat $F(x,y,z)$ aan een aantal differentiabiliteitseisen voldoet en dat de oplossing y_0 tot de klasse van twee keer continu differentieerbare functies behoort.
Wij besluiten met een eenvoudig voorbeeld van de vergelijking van Euler.
Zij $F(x,y,z) = p(x)z^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y$ waarbij p, q en f gegeven continue functies zijn en $p'(x)$ bestaat. Men vindt na uitwerking

$$Ly_0 = \frac{d}{dx} (p(x)y_0') - q(x)y_0 - f(x).$$

De methode van Ritz.

Veelal zal het expliciet oplossen van het randwaarde probleem voor de Euler vergelijking buiten de mogelijkheden liggen en zal men zijn toevlucht moeten nemen tot benaderingsmethoden of numerieke procedures.

Ook kan het zijn dat het oorspronkelijke variatie probleem geen oplossing bezit binnen de klasse van twee keer continu differentieerbare functies, dat F niet aan alle gestelde eisen voldoet en de vergelijking van Euler dus niet kunnen worden afgeleid.

Wij keren daarom terug naar de meer fundamentele formulering van ons probleem d.w.z.

$$J(y_0) \leqslant J(y) \quad \forall y \in V$$

Volgens de methode van Ritz wordt nu $y_0(x)$ benaderd door een eindige lineaire combinatie van "geschikt gekozen" functies $\phi_n(x)$. Wij zullen straks ingaan op de vraag, in welke zin een benadering voor y_0 wordt verkregen, en ook op de vraag hoe men de functies $\phi_n(x)$ "geschikt" moet kiezen. Eerst werken wij formeel de procedure volgens Ritz uit.

Wij definiëren: $y^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n\phi_n(x)$ waarbij c_n voorlopig nog willekeurige constanten zijn.

Beschouw: $J(y^{(m)}) = \int_a^b F(x, y^{(m)}(x), \frac{dy^{(m)}(x)}{dx})\, dx$

Wij wensen nu c_n, $n=1,\ldots m$, zodanig te bepalen dat voor de corresponderende $y^{(m)}$, die wij aanduiden met $y_0^{(m)}$, geldt:

$$J(y_0^{(m)}) \leqslant J(y^{(m)})$$

Nu is $J(y^{(m)}) = I(c_1,\ldots c_m)$ op te vatten als een reële functie van m variabelen $c_1,\ldots c_m$ en een noodzakelijke voorwaarde voor het minimum is

$$\frac{\partial I}{\partial c_n} = 0, \; n = 1,\ldots,m$$

Aldus wordt verkregen een stelsel voor m algebraische vergelijkingen voor $c_1,\ldots c_m$; oplossing van dit stelsel bepaalt $y_0^{(m)}$. Uiteraard hopen wij dat $y_0^{(m)}$ een benadering van y_0 zal zijn.

Het is gemakkelijk na te gaan dat als F_y en F_z bestaan, men vindt

$$<J'(y_0^{(m)}), \phi_n> = 0 \;, \; n = 1,\ldots,m$$

Als bovendien aan de eisen gebruikt bij de afleiding van de vergelijking van Euler is voldaan, dan kan men werken met:

$$\int_a^b Ly_0^{(m)}(x) \quad \phi_n(x)dx = 0 \;, \; n = 1,\ldots,m$$

Nu dient nog te worden bewezen dat $y_0^{(m)} \to y_0$ als $m \to \infty$. Voor enige belangrijke klassen van problemen is dit gelukt, enkele resultaten zullen wij in de volgende paragraaf samenvatten.

In toepassingen gebruikt men vaak de bovenbeschreven methode van benadering van y_0 door $y_0^{(m)}$ zelfs in gevallen waar formele convergentiebewijs vooralsnog ontbreekt. Veelal is gebleken dat de verkregen "benadering" zelfs bij kleine waarden van m, de door experiment waarneembare fenomenen zeer goed weergeeft.

Wij gaan nu in op de vraag: in welke zin zou $y_0^{(m)}$ als benadering van y_0 kunnen worden opgevat (d.w.z.: wat is de fout? Of, nog anders gezegd: als $y_0^{(m)}$ naar y_0 convergeert voor $m \to \infty$, in welke zin vindt de convergentie plaats?).

Om zich een indruk te vormen over wat men kan verwachten, beschouw het eenvoudige probleem waarin

$$J(y) = \int_a^b \{[y'(x)]^2 - 2f(x)y(x)\}dx$$

Het is eenvoudig na te gaan dat voor y_0 moet gelden

$$\int_a^b \{y_0'(x) \cdot \eta'(x) - f(x)\eta(x)\}dx = 0 \quad \forall\eta \in V$$

Volgens de methode van Ritz wordt y_0 benaderd door $y_0^{(m)}$

waarvoor geldt

$$\int_a^b \{[\frac{dy_0^{(m)}(x)}{dx}]^2 - f(x)y_0^{(m)}(x)\}dx = 0$$

Uit deze twee relaties kunnen wij afleiden dat

$$\int_a^b \{\frac{dy_0(x)}{dx} - \frac{dy_0^{(m)}(x)}{dx}\}^2 dx = \int_a^b f(x)[y_0(x) - y_0^{(m)}(x)]dx$$

Stel nu dat men zou kunnen aantonen dat $y_0^{(m)} \to y_0$ als $m \to \infty$

in de zin van uniforme convergentie, d.w.z.

$$\sup_{a \leq x \leq b} |y_0^{(m)}(x) - y_0(x)| \to 0 \text{ als } m \to \infty.$$

Dan zou volgen

$$\int_a^b \{\frac{dy_0(x)}{dx} - \frac{dy_0^{(m)}(x)}{dx}\}^2 dx \to 0 \text{ als } m \to \infty$$

Men zegt dat $\frac{dy_0^{(m)}}{dx} \to \frac{dy_0}{dx}$ als $m \to \infty$ in de zin van "kwadratisch gemiddelde". Dat deze convergentie niet impliceert uniforme convergentie, blijkt uit het nu volgende voorbeeld

Zij $\quad y_0(x) - y_0^{(m)}(x) = \frac{1}{m} e^{-mx}, \; 0 \leq x \leq 1$

Wij vinden

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |y_0 - y_0^{(m)}| \to 0 \text{ als } m \to \infty$$

en ook

$$\int_0^1 \{\frac{dy_0(x)}{dx} - \frac{dy_0^{(m)}(x)}{dx}\}^2 dx = \frac{1}{m}(1 - e^{-m}) \to 0 \text{ als } m \to \infty$$

Echter

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\frac{dy_0}{dx} - \frac{dy_0^{(m)}}{dx}| = 1.$$

Bovenstaande overwegingen maken het wellicht niet al te verrassend dat men, voor de verdere ontwikkeling van de theorie voor de ruimte V kiest een Hilbert ruimte waarin inwendig product

gedefinieerd is door

$$(u,v) = \int_a^b \{\frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + u(x)\ v(x)\}dx$$

De norm is dan

$$\|y\|^2 = \int_a^b \{[\frac{dy(x)}{dx}]^2 + [y(x)]^2\}dx$$

Een dergelijke Hilbert ruimte wordt een Sobolev ruimte genoemd en aangeduid met $H^1(D)$. Daar wij geëist hebben $y(a) = y(b) = 0$, werken wij in een deelruimte $H_0^1(D) \subset H^1(D)$.
Van een Hilbert ruimte is bekend dat er een basis in bestaat, d.w.z. een aftelbare rij lineair onafhankelijke functies met de eigenschap dat elk element uit V met een "willekeurige nauwkeurigheid" kan worden benaderd door een lineaire combinatie van de functies die de basis vormen (de "willekeurige nauwkeurigheid" moet uiteraard worden verstaan in de zin van de ingevoerde norm).
Het ligt nu voor de hand om als "geschikte" keuze van de functies $\phi_n(x)$ in de Ritz-methode te beschouwen de keuze van ϕ_n's die in $H_0^{(1)}(D)$ een basis vormen.

Lineaire problemen.

Een variatie probleem wordt lineair genoemd als $F_y(x,y_0,y_0')$ en $F_z(x,y_0,y_0')$ lineaire functies zijn van y_0 en y_0'. In dat geval hebben wij als algemene vorm:

$$\delta J = \delta\int_a^b \{\alpha(x)y_0'(x)\eta'(x)+\beta_1(x)y_0'(x)\eta(x)+\beta_2(x)y_0(x)\eta'(x)$$
$$+\gamma(x)y_0(x)\eta(x)\}dx+\delta\int_a^b\{f(x)\eta'(x)+g(x)\eta(x)\}dx$$

waarbij α, β, γ, f en g gegeven functies zijn.

Wij definieren nu een bilineaire vorm

$$L(y_0,\eta) = \int_a^b\{\alpha(x)y_0'(x)\eta'(x)+\beta_1(x)y_0'(x)\eta(x)+\beta_2(x)y_0(x)\eta'(x)$$
$$+\gamma(x)y_0(x)\eta(x)\}dx$$

en een lineaire vorm:

$$S(\eta) = -\int_a^b \{f(x)\ \eta'(x) + g(x)\ \eta(x)\}dx$$

Ons variatie probleem is aldus teruggebracht tot het bepalen van $y_0 \in V$ zodanig dat

$$L(y_0,\eta) = S(\eta) \quad \forall\eta \in V$$

De nu volgende twee resultaten (waarvan het bewijs hier achterwege wordt gelaten) geven de fundering van de lineaire theorie.

Lemma (van Lax en Milgram).

Zij V een Hilbert ruimte, $L(y_0,\eta)$ een continue bilineaire vorm op V met de eigenschap dat

$$L(\eta,\eta) \geqslant \sigma\|\eta\|^2, \ \sigma > 0$$

Zij voorts $S(\eta)$ een continue lineaire vorm op V.

Dan bestaat er één en slechts één element $y_0 \in V$ waarvoor geldt

$$L(y_0,\eta) = S(\eta) \quad \forall\eta \in V.$$

Stelling (convergentie van de Ritz-methode).

Laat $L(y,\eta)$ en $S(\eta)$ voldoen aan de eisen van voorgaande Lemma.

Zij $\{\phi_n\}$ een basis in V en $y_0^{(m)}$ functies gedefinieerd door

$$y_0^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n\phi_n(x)$$

terwijl de coëfficiënten c_n voldoen aan

$$L(y_0^{(m)}, \phi_n) = S(\phi_n), \; n = 1,\ldots,m$$

dan geldt

$$y_0^{(m)} \rightarrow y_0 \text{ als } m \rightarrow \infty \text{ in } V.$$

Toepassing.

Beschouw het lineaire variatie probleem.

$$L(\eta,\eta) = \int_a^b \{\alpha(x)[\eta'(x)]^2 + \beta(x)\eta'(x)\eta(x)+\gamma(x)[\eta(x)]^2\}dx$$

Stel $\beta(x)$ differentieerbaar. Door partieel integreren volgt

$$L(\eta,\eta) = \int_a^b \{\alpha(x)[\eta'(x)]^2 + [\gamma(x) - \tfrac{1}{2}\beta'(x)][\eta(x)]^2\}dx$$

Als nu $\alpha(x) > 0$ en $\gamma(x) - \frac{1}{2}\beta'(x) > 0$ op $[a,b]$ dan bestaat er een constante $\tau > 0$ zodanig dat

$$L(\eta,\eta) \geqslant \sigma\|\eta\|^2 \quad \forall \; \eta \in H_0^1$$

Het lemma en de stelling zijn nu van toepassing.

Men overtuigt zich gemakkelijk dat de in de stelling geformuleerde vergelijkingen voor c_n, $n = 1,\ldots,m$ dezelfde zijn als de eerder afgeleide relaties

$$\langle J'(y_0^{(m)}), \phi_n\rangle = 0 \quad n = 1,\ldots,m.$$

Wij vinden aldus dat de Ritzbenadering convergeert in $H_0^1(D)$.

Opmerking: De boven gegeven lemma en stelling gelden ook voor functies van meerdere variabelen. Men beschouwt dan $\underline{x} \rightarrow \underline{Y}(\underline{x})$,

$\underline{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ en de functionalen worden door herhaalde integralen over D gedefinieerd.

De methode van Galerkin voor differentiaalvergelijkingen.

Laat $Ly_0 = 0$ een differentiaalvergelijking van de tweede orde symboliseren, bijvoorbeeld

$$Ly_0 = \frac{d}{dx}(p(x)y_0') - q(x)y_0 - f(x) = 0$$

Men wenst op interval $[a,b]$ de functie $y_0(x)$ zodanig te bepalen dat $y(a) = y(b) = 0$.
Wij hebben gezien (bij de afleiding van de vergelijking van Euler) dat:

$$\{\int_a^b Ly_0(x) \quad \eta(x)dx = 0, \ \forall \ \eta \in V\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Ly_0 = 0, \ y_0(a) = y_0(b) = 0\}$$

Wij kunnen dus, in plaats van het randwaarde probleem voor de differentiaalvergelijking, een variationeel probleem oplossen.
De methode van Galerkin voor de differentiaalvergelijkingen bestaat uit het oplossen volgens Ritz van het corresponderend variationele probleem.
Men spreekt daarom ook vaak van de methode van Ritz-Galerkin.

Samenvattend bestaat de Galerkin methode uit het volgende:
De oplossing $y_0(x)$ van $Ly_0 = 0$ met $y_0(a) = y_0(b) = 0$ wordt benaderd door de functie

$$y_0^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n\phi_n(x)$$

waarbij $\{\phi_n\}$ een "geschikt gekozen" basis is in V en $c_n, n = 1,\ldots m$ voldoen aan

$$\int_a^b Ly_0^{(m)}(x) \cdot \phi_n(x)dx = 0, \; n = 1,\ldots,m.$$

Ten aanzien van de convergentie geldt dat indien p en q zodanig zijn dat voorgaande theorie kan worden toegepast, dan $y_0^{(m)} \to y_0$ als $m \to \infty$ in $H_0^{(1)}(D)$.

Wat deze convergentie kan inhouden lichten wij nogmaals toe aan de hand van een eerder behandeld voorbeeld.

Stel dat $y_0(x) - y_0^{(m)}(x) = \frac{1}{m} e^{-mx}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wij hebben $\| y_0 - y_0^{(m)} \| \to 0$ als $m \to \infty$ in $H_0^1(D)$. Voorts vinden wij

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y_0(x) - y_0^{(m)}(x)| \to 0 \text{ als } m \to \infty.$$

Dus: $y_0^{(m)}$ mag wel in de gebruikelijke zin als een "zeer goede" benadering van y_0 worden opgevat.

Ten aanzien van de afgeleiden geldt

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \frac{dy_0(x)}{dx} - \frac{dy_0^{(m)}}{dx} \right| = 1,$$

echter

$$\sup_{\delta \leqslant x \leqslant 1} \left| \frac{dy_0(x)}{dx} - \frac{dy_0^{(m)}(x)}{dx} \right| \to 0 \text{ als } m \to \infty$$

voor elke $\delta > 0$, hoe klein ook.

Dus: $\frac{dy_0^{(m)}}{dx}$ is ook een "zeer goede" benadering van $\frac{dy_0}{dx}$, echter met uitzondering van een willekeurig kleine omgeving van $x = 0$.

Of een dergelijk "locaal falen" van de benadering kan worden geaccepteerd hangt af van de aard van het behandelde probleem.

Tot slot werken wij als voorbeeld de Galerkin-methode nader uit voor het probleem

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} - q(x)y_0 = f(x); \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$y_0(0) = y_0(1) = 0$$

Wij kiezen als basis

$$\phi_n = \sin n\pi x$$

en benaderen y_0 door

$$y_0^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \sin k\pi x$$

De coëfficiënten c_k moeten voldoen aan

$$\int_a^b \left\{\frac{d^2 y_0^{(m)}(x)}{dx^2} - q(x) y_0^{(m)}(x)\right\} \sin n\pi x \, dx = \int_a^b f(x) \sin n\pi x \, dx$$

Twee keer partieel integreren levert

$$\int_a^b \{n^2\pi^2 - g(x)\}\, y_0^{(m)}(x) \sin n\pi x \, dx = -\int_a^b f(x) \sin n\pi x \, dx$$

Door substitutie van $y_0^{(m)}$ volgt

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \int_a^b (n^2\pi^2 - q(x)) \sin k\pi x \sin n\pi x \, dx = -\int_a^b f(x) \sin n\pi x \, dx$$

$$n = 1, \ldots, m$$

Dus, c_k, $k = 1,\ldots,m$ worden verkregen als oplossing van een stelsel van m lineaire algebraïsche vergelijkingen.

Variatie problemen en optimale besturing.

Zoals al eerder opgemerkt, liggen vele moderne toepassingen voor variatierekening op het gebied van zogenaamde optimale besturing. Wij zullen thans een typische probleemstelling uit dit gebied van de toegepaste wiskunde beschrijven.

Stel dat de toestand van een systeem voor elke $x \in [a,b]$ gekarakteriseerd wordt door n functies $y_2(x),\ldots,y_n(x)$.
De functionering van het systeem wordt beschreven door een stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1,\ldots y_n, u_1,\ldots,u_r) \quad i = 1,\ldots,n$$

waarbij $u_1,\ldots,u_r$ op $[a,b]$ gedefinieerde en voorts nog nader te specificeren functies zijn.

In vector notatie schrijven wij

$$\frac{d\underline{Y}}{dx} = G(x,\underline{Y},\underline{u})$$

$\underline{Y}$ worden de toestands variabelen genoemd en $\underline{U}$ de stuurvariabelen. Door verschillende keuzen van $\underline{U}$ te maken kunnen wij het systeem beïnvloeden en streven naar een "optimale" functionering volgens een nader te specificren criterium. Bijvoorbeeld: Y(a) en Y(b) zijn voorgeschreven, $\underline{U}$ dient zodanig te worden bepaald dat de functionaal

$$J(\underline{Y}, \underline{U}) = \int_a^b f(x,\underline{Y}(x), \underline{U}(x))\, dx$$

minimaal is.

In het allereenvoudigste geval waar in $n = r = 1$, $G(x,y,u) = u$, vinden wij hier terug het door ons eerder beschouwde elementaire variatie probleem.

In het geval $n = r$, $\underline{G}(x,\underline{Y},\underline{U}) = \underline{U}$ vinden wij een generalisatie van het elementaire variatie probleem tot vector-functies.

In het algemene geval worden wij geconfronteerd met variatie problemen van een nieuw type waaraan veel modern onderzoek is gewijd.

Literatuur (een leidraad).

Er bestaat een zeer omvangrijke literatuur over de zogenaamde klassieke variatierekening d.w.z. variatierekening geïnspireerd door problemen van de fysika. Een goede inleiding vindt men in de bijdrage van Bottema in "Handboek der Wiskunde" deel 2, en voorts in hoofdstukken 4 en 6 van Courant-Hilbert "Methoden der mathematischen Physik I". Men bedenke wel dat dit laatste boek, alhoewel zeer be-

kend en nog steeds zeer veel gebruikt, geschreven is voor de moderne analyse haar huidige vorm heeft gevonden. (Zo spreekt Courant over "Funktionenfunktionen" wanneer hij funktionalen wil aanduiden).

Een modernere inleiding vindt men in de bijdrage van Moisseev en Tikhomirov in "Mathematics applied to physics" (Editor E. Roubine) Springer Verlag (1970). Deze auteurs voren niet in de Sobolev ruimte $H_0^1(D)$, maar gebruiken de supremum norm. Zij behandelen ook niet de Ritz-Galerkin methode. Formulering en resultaten in Hilbert ruimte vindt men in bijdrage van Lions, eveneens in "Mathematics Applied to physics".

Uitgewerkte voorbeelden van toepassing van Ritz-Galerkin methode vindt men (nogal langdradig behandeld) in "Approximate Methods of Higher Analysis" hoofdstuk 5 van Kantorovich en Krilov, Noordhoff 1964.

Alle bovengenoemde werken bevatten uiteraard uitvoerige verdere literatuur verwijzingen.

ASYMPTOTIEK

Ter Inleiding.

Zij $\Phi(t)$ een reële functie gedefinieerd voor alle $t \in T \subset \mathbb{R}$, en zij t_0 een limietpunt van T. Stel dat men de functie Φ wil analyzeren in een omgeving T_0 van t_0. Ten behoeve van deze analyse wil men $\Phi(t)$ vervangen door een geschikt gekozen benadering $\phi(t)$. Een dergelijke benadering wordt "asymptotisch" genoemd indien de benadering beter wordt (in een nader te preciseren zin) naarmate t dichter bij t_0 ligt.

Als een eenvoudig voorbeeld beschouw

$$\Phi(t) = \phi_1(t) + \bar{e}^{t}\,\phi_2(t)$$

waarbij $\phi_1(t)$ en $\phi_2(t)$ rationale functies zijn, gedefinieerd op $0 \leq t < \infty$, terwijl $\phi_2(t)$ begrensd is op dit interval. Stel dat men geinteresseerd is in $\Phi(t)$ voor zeer grote waarden van t. Het is duidelijk dat

$$|\Phi(t) - \phi_1(t)| \leq c\,\bar{e}^{t}$$

waarbij c een constante is. Dus, voor grote waarden van t, kan de functie $\phi_1(t)$ als asymptotische benadering van $\Phi(t)$ dienen.

Als tweede, en sterker sprekend voorbeeld, beschouw

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \bar{e}^{tz}\,\frac{dz}{z+1} \;;\; t > 0$$

Men kan aantonen dat

$$\Phi(t) = e^{t}\{-\ln t - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{t^k}{k\,k!}\}$$

De machtreeks in het rechterlid convergeert voor alle waarden van $t \geqslant 0$. Desondanks is deze formule voor het onderzoek van $\Phi(t)$ voor grote waarden van t volkomen ongeschikt. Wil men numerieke waarde van $\Phi(t)$ voor een grote waarde van t met een redelijke nauwkeurigheid bepalen, dan is een zeer groot aantal termen van de machtreeks nodig.

Bij een voorgeschreven nauwkeurigheid neemt het aantal benodigde termen toe naarmate t toeneemt.

Een eenvoudige asymptotische benadering van $\Phi(t)$ voor grote waarden van t kan als volgt worden verkregen:

Schrijf: $\frac{1}{z+1} = 1 + [\frac{1}{z+1} - 1] = 1 - \frac{z}{z+1}$

Substitutie in de integraal die $\Phi(t)$ definieert levert

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz}\,dz - \int_0^\infty e^{-tz}\frac{z}{z+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{t} + R_1$$

waarbij

$$|R_1| = \int_0^\infty e^{-tz}\frac{z}{z+1}\,dz < \int_0^\infty e^{-tz}\,z\,dz = \frac{1}{t^2}$$

Dus: $\phi(t) = \frac{1}{t}$ kan dienen als asymptotische benadering van $\Phi(t)$.

De nauwkeurigheid wordt geven door de schatting

$$|\Phi(t) - \phi(t)| < \frac{1}{t^2}$$

Men kan de asymptotische benadering verder "verbeteren" door als volgt te werk te gaan:

Schrijf: $\frac{1}{z+1} = \sum_{k=1}^{m} (-z)^{k-1} + \{\frac{1}{z+1} - \sum_{k=1}^{m} (-z)^{k-1}\}$

$$= \sum_{k=1}^{m} (z)^{k-1} + \frac{(-z)^m}{z+1}$$

Substitutie in de integraal levert nu

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}(k-1)!\ t^{-k} + R_m$$

waarbij

$$|R_m| = \int_0^\infty e^{-tz} \frac{z^m}{z+1}\, dz < \int_0^\infty e^{-tz} z^m dz = m!\ \frac{1}{t^{m+1}}$$

Wij merken op dat

$$R_m \to 0 \text{ als } t \to \infty$$

en zelfs

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} \to 0 \text{ als } t \to \infty.$$

Echter, de formele reeks $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}(k-1)!\ t^{-k}$ is divergent! Men kan dus niet verwachten dat men de nauwkeurigheid van een asymptotische benadering, bij een vaste t (hoe groot ook) willekeurig kan opvoeren door meer termen van de reeks te nemen. Bij het hanteren van asymptotische benaderingen is een flinke mate van begrip en voorzichtigheid geboden.

Asymptotische grondbegrippen.

Zij nu $\Phi(t)$ en $\Psi(t)$ twee functies, gedefinieerd voor $t \in T \subset \mathbb{R}$ en zij t_0 een limietpunt van T. Om het gedrag van Φ en Ψ, als $t \to t_0$, te vergelijken gebruiken wij de volgende orde-symbolen.

Definitie. $\Phi = O(\Psi)$ voor $t \to t_0$ indien er een constante k bestaat en een omgeving U van t_0 zodanig dat

$$|\Phi| \leq k|\Psi| \text{ voor } t \in U$$

$\Phi = o(\Psi)$ voor $t \to t_0$ indien

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Phi}{\Psi} = 0.$$

Door toepassing van orde-symbolen kunnen functies asymptotisch worden geordend. In alles wat nu volgt bestuderen wij (zonder het iedere keer opnieuw expliciet te vermelden) het gedrag voor $t \to t_0$, waarbij t_0 een limiet punt is van het definitie gebied der te beschouwen functies.

Definitie. Een rij $\{\phi_k(t)\}$ $k = 1, 2, \ldots$ is een asymptotisch geordende rij, of kortweg een asymptotische rij, indien voor alle k geldt

$$\phi_{k+1} = o(\phi_k)$$

Een reeks $\sum_{k=1}^{m} a_k\phi_k(t)$, waarbij a_k (numerieke) constanten zijn, is een asymptotische reeks, indien $\{\phi_k\}$ een asymptotische rij is.

Met behulp van asymptotische reeksen kunnen wij op een systematische manier "alsmaar betere" asymptotische benaderingen definiëren.

Definitie. Zij gegeven een functie $\Phi(t)$. $\phi_1(t)$ is een asymptotische benadering van $\Phi(t)$ indien geldt

$$\Phi - \phi_1 = o(\phi_1).$$

De asymptotische reeks $\sum_{k=1}^{m} a_k\phi_k(t)$ is een asymptotische ontwikkeling van $\Phi(t)$ indien geldt

$$\Phi - \sum_{k=1}^{m} a_k\phi_k = o(\phi_m)$$

Opmerkingen.

Als $\sum_{k=1}^{m} a_k\phi_k(t)$ een asymptotische ontwikkeling van $\Phi(t)$ is, dan schrijft men vaak

$$\Phi(t) \sim \sum_{k=1}^{m} a_k\phi_k(t)$$

Als een asymptotische ontwikkeling voor alle m geldt dan schrijft men ook

$$\Phi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k(t)$$

Deze schrijfwijze is symbolisch, daar de reeks ook divergent kan zijn.

Wil men aangeven dat $\Phi(t)$ begrensd is, dan is het gebruikelijk te schrijven

$$\Phi(t) = O(1)$$

Men schrijft ook $\Phi(t) = o(1)$ om aan te geven dat $\Phi(t) \to 0$ als $t \to t_0$.

Rekenen met orde symbolen.

De nu volgende relaties kunnen zeer eenvoudig worden bewezen:

1. $O(\phi) \cdot O(\psi) = O(\phi \cdot \psi)$
2. $O(\phi) \cdot o(\psi) = o(\phi \cdot \psi)$
3. Als $\phi = O(\psi)$ dan is:
   3.1. $O(\phi) + O(\psi) = O(\psi)$
   3.2. $o(\phi) + o(\psi) = o(\psi)$
   3.3. $O(\phi) + o(\psi) = O(\psi)$

Het hanteren van asymptotische ontwikkelingen.

Bij het analyseren van functies door middel van asymptotische ontwikkelingen dient men de vraag te stellen: hoeveel termen van de reeks moet men "meenemen" en wat is de verkregen nauwkeurigheid. Bij het beantwoorden van deze vraag zijn de nu volgende overwegingen van nut.

I. Een asymptotische reeks kan convergent of divergent zijn. Is de reeks convergent dan behoeft de som van de reeks niet gelijk te zijn aan de ontwikkelde functie. Als voorbeeld beschouw

$$\Phi(t) = \frac{1}{1+t} + e^{-t}$$

Voor $t \to \infty$ hebben wij

$$\Phi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{t^{k+1}} \neq \Phi(t)$$

De benadering door een eindig aantal termen van de reeks wordt dus alsmaar beter naarmate men meer termen meeneemt.
Echter de fout kan niet willekeurig klein worden gemaakt door voldoende groot aantal termen te nemen.

II. Bij een divergente asymptotische reeks kan een te groot aantal termen onjuiste resultaten geven. Dit blijkt uit het nu volgende resultaat:

Stelling. Zij $\Phi(t)$ een begrensde functie en voor $t \to t_0$

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \phi_k(t) + R_m(t)$$

met

$$\phi_{k+1} = o(\phi_k); \; R_m = o(\phi_m)$$

Voorts $|R_m(t)| \to \infty$ als $m \to \infty$. Dan geldt:

1. Voor elke vaste waarde $t = t_1$ bestaat er een natuurlijk getal μ zodanig dat voor alle $m \neq \mu$

   $$|R_\mu(t_1)| \leq |R_m(t_1)|.$$

2. Als $t_1 \to t_0$ dan $\mu \to \infty$ (en uiteraard ook $R_\mu(t_1) \to 0$).

Bewijs is nagenoeg triviaal. Het bestaan van een waarde $m = \mu$ zoals in de stelling bedoeld volgt uit $|R_m(t)| \to \infty$ voor $m \to \infty$. Het feit dat $\mu \to \infty$ als $t_1 \to t_0$ volgt uit

$$\frac{R_{\mu+1}}{R_\mu} = o(1).$$

Asymptotiek van integralen

In toepassingen is men vaak geconfronteerd met de opgave een integraal van het volgende type te berekenen:

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{tw(z)} f(z)dz$$

Voorlopig worden alle grootheden reëel verondersteld, t is een parameter die grote waarden aanneemt. Een eenvoudig voorbeeld van een dergelijke integraal (met zijn asymptotische ontwikkeling) hebben wij in de inleiding reeds gezien. Beschouw opnieuw

$$\Phi(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-tz} \frac{dz}{z+1}$$

Wij hebben aangetoond dat

$$\Phi(t) \sim \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}(k-1)!t^{-k}$$

De behandeling in de inleiding was echter geheel zonder enige motivering. Thans willen wij een gedachtengang ontwikkelen die ook in het meer algemene geval ons in staat zal stellen asymptotische ontwikkeling van integralen te bepalen.
Beschouw:

$$\Phi(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-tz} f(z)dz$$

Dergelijke integralen worden Laplace integralen genoemd. Als t groot is, dan is e^{-tz} voor $z > 0$ zeer klein. Men kan dus "verwachten" dat de grootste bijdrage tot de integraal geleverd wordt door "een omgeving" van $z = 0$. In die omgeving kan men wellicht f(z) geschikt benaderen en aldus de asymptotische ontwikkeling van $\Phi(t)$ bepalen.

Bovenstaande redenering leidt tot het volgende resultaat:

Stelling: Zij

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz} f(z)dz$$

waarbij f(z) een begrensde functie is op $0 \leqslant z < \infty$,

terwijl de reeks

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_n z^n$$

convergent is voor $0 \leqslant z \leqslant z_0$, met $z_0 > 0$. Dan geldt

voor $t \to \infty$ en willekeurige m:

$$\Phi(t) \sim \sum_{h=0}^{m} a_n \int_0^\infty z^n e^{-tz} dz = \sum_{n=0}^{m} a_n n! t^{-(n+1)}.$$

Bewijs: Wij schrijven

$$\Phi(t) = \int_0^\zeta e^{-tz} f(z)dz + \int_\zeta^\infty e^{-tz} f(z)dz$$

waarbij ζ een willekeurige maar vast gekozen getal is,

zodanig dat

$$0 < \zeta < z_0$$

Wij weten dat er een constante M bestaat zodanig dat

$$|f(z)| < M$$

Er volgt dat

$$\left| \int_\zeta^\infty e^{-tz} f(z)dz \right| < \frac{M}{t} e^{-\zeta t} = O(t^{-1} e^{-\zeta t})$$

Dus:

$$\Phi(t) = \int_0^\zeta e^{-tz} f(z)dz + O(t^{-1} e^{-\zeta t})$$

Schrijf nu

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n z^n = f_m(z)$$

Uit de eigenschappen van convergente machtreeksen volgt dat er een constante M' bestaat zodanig dat, voor $0 \leqslant z \leqslant z_0$

$$|f_m(z)| < M' z^{m+1}$$

Wij schrijven

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n \int_0^{\zeta} z^n e^{-tz} dz + \int_0^{\zeta} f_m(z) e^{-tz} dz + O(t^{-1} e^{- \ t})$$

Expliciete berekening van de integralen levert:

$$\int_0^{\zeta} z^n e^{-tz} dz = -[\, e^{-tz} \{ \frac{z^n}{t} + \frac{nz^{n-1}}{t^2} + \frac{n(n-1)z^{n-2}}{t^3} + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{n!z}{t^n} + \frac{n!}{t^{n+1}} \}] \Big|_0^{\zeta} = \frac{n!}{t^{n+1}} + \frac{1}{t} e^{-\zeta t} g_n(\zeta, t)$$

waarbij $g_n(\zeta,t)$ uniform begrensd is voor $0 \leqslant \zeta \leqslant z_0$ en $t \geqslant t_0 > 0$.

Op analoge wijze vinden wij

$$\left| \int_0^{\zeta} f_m(z) e^{-tz} dz \right| < M' \int_0^{\zeta} z^{m+1} e^{-tz} dz = M' \{ \frac{(m+1)!}{t^{m+2}} + \frac{1}{t} e^{-\zeta t} g_{m+1}(\zeta, t) \}$$

Er volgt aldus:

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n \frac{n!}{t^{n+1}} + O(t^{-m-2}) + O(t^{-1} e^{-\zeta t})$$

Het is eenvoudig in te zien dat indien er voor een functie $\psi(t)$ geldt

$$\psi(t) = O(t^{-1} e^{-\zeta t}), \ \zeta > 0$$

er ook geldt $\psi(t) = O(t^{-m-2})$ en zelfs $\psi(t) = o(t^{-m-2})$, met m willekeurig.

Hiermee vinden wij

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n \frac{n!}{t^{n+1}} + O(t^{-m-2}),$$

hetgeen de stelling bewijst.

Opmerkingen:

De ontwikkeling van $\Phi(t)$ voor het geval dat $f(z) = (1+z)^{-1}$, welke in de inleiding was gegeven, is in feite een eenvoudige toepassing van de nu bewezen stelling. De stelling kan nog worden gegeneraliseerd tot het geval dat in $0 \leqslant z \leqslant z_0$, $z_0 > 0$, geldt

$$f(z) = P(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

waarbij $P(z)$ een gegeven functie is. De asymptotische ontwikkeling is daar gegeven door

$$\Phi(t) \sim \sum_{n=0}^{m} a_n \int_0^{\infty} P(z) z^n e^{-tz} dz$$

Deze generalisatie heeft belangrijke toepassingen, bijvoorbeeld het geval

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{z+1}$$

Ontwikkelingen door partiële integratie

Het kan voorkomen dat $f(z)$ geen convergente machtreeksontwikkeling bezit in de omgeving van $z = 0$. Men kan dan gebruik maken van een andere methode (welke overigens, in het geval dat $f(z)$ wel een machtreeksontwikkeling bezit, equivalent resultaat levert met de reeds behandelde stelling).

Stelling: Zij $\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz} f(z)dz$

waarbij $f(z)$ uniform begrensd is op $0 \leqslant z < \infty$. Stel dat de afgeleiden

$$\frac{d^n f}{dz^n} = f^{(n)}(z)$$

bestaan en uniform begrensd zijn voor $0 \leqslant z \leqslant z_0$, $z_0 > 0$, en $n = 1,2,\ldots,m+1$.

Dan geldt

$$\Phi(t) \sim \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{t^{n+1}} f^{(n)}(0); \; f^{(0)}(0) = f(0).$$

Bewijs: Wij schrijven opnieuw

$$\Phi(t) = \int_0^\zeta e^{-tz} f(z)dz + \int_\zeta^\infty e^{-tz} f(z)dz$$

met $0 < \zeta < z_0$. Wij weten al dat

$$\int_\zeta^\infty e^{-tz} f(z)dz = O(t^{-1}e^{-\zeta t})$$

De eerste integraal wordt partieel m-keer geïntegreerd als volgt:

$$\int_0^\zeta e^{-tz} f(z)dz = \frac{1}{t}\{f(0) - e^{-\zeta t} f(\zeta)\} + \frac{1}{t}\int_0^\zeta e^{-tz} f^{(1)}(z)dz$$

$$\frac{1}{t}\int_0^\zeta e^{-tz} f^{(1)}(z)dz = \frac{1}{t^2}\{f^{(1)}(0) - e^{-\zeta t} f^{(1)}(\zeta)\} +$$

$$+ \frac{1}{t^2}\int_0^\zeta e^{-tz} f^{(2)}(z)dz \quad \text{enz.}$$

De resultaten samenvattend vindt men

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{t^{n+1}} f^{(n)}(0) + O(t^{-m-2}) + O(t^{-1}e^{-\zeta t}).$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Kritieke punten en de methode van Laplace

In een verdere uitbreiding beschouw nu

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{tw(z)} f(z)dz$$

waarbij w(z) en f(z) reële functies zijn.

Wij mogen verwachten dat de grootste bijdrage tot de integraal komt uit de omgeving van de punten van het interval $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$, waarvoor w(z) een maximum bereikt. Deze punten worden kritieke punten genoemd. Volgens de methode van Laplace wordt de asymptotische ontwikkeling van $\Phi(t)$ bepaald door beide functies w(z) en f(z) in de omgeving van de kritieke punten geschikt te benaderen. Nadere uitwerking kan men vinden in :

A. Erdélyi, "Asymptotic Expansions", Dover, 1956

H.A. Lauwerier, "Asymptotic Expansions", Mathematical Centre Traets, 1966

N.G. de Bruijn, "Asymptotic methods in Analysis", North Holland, 1958

Integralen met snel oscillerende integranden

Voorgaande theorie kan worden uitgebreid tot het geval dat tw(z) complex is. Wij beperken ons hier tot het eenvoudige geval

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{itz} f(z)dz$$

waarbij t, f(z) en z reëel zijn.

Wegens de snelle oscillaties van de integrant moet men verwachten dat bijdragen tot de integraal van opeenvolgende deelintervallen van de lengte $\frac{\pi}{t}$ nagenoeg tegenelkaar zullen wegvallen. Het blijkt dan ook dat een significante bijdrage uitsluitend wordt geleverd door omgevingen van de uiteinden van het integratie interval, $z = \alpha$ en $z = \beta$.

Stelling: Zij $\Phi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{itz} f(z)dz$

waarbij f(z) een m+1 keer continu differentieerbare functie is op $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$.

Zij $\frac{d^n f}{dz^n} = f^{(n)}(z)$; $f^{(0)}(z) = f(z)$.

Dan geldt

$$\Phi(t) \sim \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{(it)^k} \{ e^{it\beta} f^{(k)}(\beta) - e^{it\alpha} f^{(k)}(\alpha) \}.$$

Bewijs: Volgt door partiële integratie.

Slotopmerkingen

In het voorgaande zijn enkele elementaire grondbeginselen en toepassingen van de asymptotiek behandeld. Moderne ontwikkeling heeft vooral betrekking op functies van meerdere variabelen in verband met de zogenaamde storingsproblemen.

Zij nu $x_1,\dots,x_n$ reële variabelen en ε een reële parameter (men gebruikt ε in plaats van t omdat de problemen meestal zo zijn geformuleerd dat de parameter kleine waarden aanneemt). Zij $\Phi(x_1,\dots,x_n,\varepsilon)$ een functie gedefinieerd als oplossing van een differentiaalvergelijking

$$L_\varepsilon\Phi = 0 \text{ voor } (x_1,\dots,x_n) \in \bar{D}$$

Hierbij treedt ε op als een parameter in de operator L_ε. Voorts worden voorwaarden op de rand van het definitie gebied $\bar{D}$ opgelegd.

Men wenst nu asymptotische benaderingen van Φ te construeren, geldig voor $\varepsilon \to 0$. Het probleem is dan meestal zodanig gecompliceerd dat constructie van een expliciete representatie van Φ buiten de praktische mogelijkheden ligt.

Voor de behandeling van dergelijke problemen moeten in de eerste plaats de grondbegrippen van de asymptotiek nader worden aangepast. De orde van grootte van een functie wordt gemeten door middel van een geschikt gekozen norm, bijvoorbeeld

$$\|\Phi\| = \max_D |\Phi|$$

Men merke op dat een functie van verschillende orde van grootte kan zijn in verschillende deelverzamelingen van $\bar{D}$.

De definitie van asymptotische ontwikkelingen brengt nu vergaande moeilijkheden met zich mee. Men kan, in analogie met het voorgaande, invoeren de asymptotische reeksen

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(x_1,\ldots,x_n)\phi_k(\varepsilon)\ ,\ \phi_{k+1} = O(\phi_k)$$

en daarmee als asymptotische ontwikkeling definiëren

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_1,\ldots,x_n)\phi_k(\varepsilon) + O(\phi_m)$$

Een dergelijke ontwikkeling in het geval $\phi_k = \varepsilon^k$ wordt een Poincaré ontwikkeling genoemd.

Het blijkt echter dat in vele door differentiaalvergelijkingen gedefinieerde problemen de functie Φ geen ontwikkeling van boven gegeven vorm in $\overline{D}$ bezit. Dergelijke problemen worden singulier genoemd en zijn onderwerp van vele recente onderzoekingen. Een inleiding in de boven geschetste problematiek kan men vinden in:
W. Eckhaus, "Matched asymptotic expansions and singular perturbations", North-Holland, 1973.

Praktikum Toegepaste Analyse

Differentiaalvergelijkingen

1. Gegeven is de functie $f(x)$ op (a,b). Bewijs dat als $f(x)$ kontinu differentieerbaar is op (a,b), $f(x)$ Lipschitz-kontinu is op $[c,d] \subset (a,b)$.

2. Gegeven is de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = y \log y, \; y > 0$$
$$= 0 \qquad , \; y = 0$$

We zijn geïnteresseerd in oplossingen in het x,y-vlak die gaan door het punt $\ulcorner x_0, y_0 \urcorner$. In welke punten van het x,y-vlak is voor deze oplossingen niet aan de voorwaarden van de existentie- en eenduidigheidsstelling voldaan? Geef de oplossingen met beginvoorwaarden $y(0) = 0$, $y(0) = 1/2$, $y(0) = 1$.

3. Gegeven is de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \;, \; y(x_0) = 0$$
$$x_0 \in \mathbb{R}^1$$

a. Ga na dat voor dit probleem aan de voorwaarden van de existentie en eenduidigheidsstelling is voldaan.

b. Hoe groot is het interval waarop de oplossing bestaat?

4. In modellen voor de groei van de wereldbevolking (of de groei van een deel daarvan, of de bevolkingsgroei van een andere diersoort) geeft $y(t)$ het aantal personen aan op tijdstip t; $y(0) = y_0 (> 0)$ en het geboorteoverschot is r % per jaar. Dit percentage verandert in de loop der tijden kontinu.

a. Bedenk voor de laatste opmerking een toelichting.

b. Een mathematisch model voor dit proces wordt gegeven door

$$\frac{dy}{dt} = r(t)y, \; y(0) = y_0.$$

Ga na dat het model een oplossing bezit die eenduidig is.

c. Bereken deze oplossing.

d. Leid een betrekking af voor de tijd T waarin de bevolking in aantal verdubbelt. Merk op dat deze verdubbelingstijd T onafhankelijk is van de beginvoorwaarde.

e. In het rapport van de club van Rome (uitgave Het Spectrum, pag. 38) wordt opgemerkt dat in het jaar 1650 de wereldbevolking 0.5 miljard mensen bedroeg, het geboorteoverschot was 0.3 % per jaar. Neem aan dat dit konstant is, hoe groot wordt dan T?

f. In 1970 telde de wereldbevolking 3.6 miljard mensen en bedroeg het geboorteoverschot 2.1 %. Neem aan dat het geboorteoverschot lineair is toegenomen van 1650 tot 1970. Bereken opnieuw de bevolkingsgroei y(t) en de verdubbelingstijd T.

g. De aanname van lineaire toename van het geboorteoverschot is kennelijk te grof (waarom?). Een realistischer model krijgen we als volgt: Neem aan er is een tijdstip τ, $1650 < \tau < 1970$, zodanig dat op $[1650, \tau]$ r konstant is en op $[\tau, 1970]$ lineair toeneemt. Bepaal τ; hoe groot wordt T in 1970?

5. Een zeer eenvoudige theorie voor de beschrijving van epidemieën is de volgende. Veronderstel dat er n leden in een afgesloten gemeenschap zijn, waarvan er p geïnfecteerd zijn en q niet geïnfecteerd, maar wel vatbaar; $p+q = n$. Voer in het relatieve aantal zieke individuen $x = \frac{p}{n}$ en gezonde individuen $y = \frac{q}{n}$. Laat n zo groot zijn, dat in benadering x en y als kontinue variabelen mogen worden behandeld. De verspreiding van de ziekte wordt gegeven door $\frac{dx}{dt}$; de verspreiding is evenredig met het aantal kontakten tussen zieke en gezonde individuen.

a. Stel de vergelijking op die de verspreiding van de ziekte beschrijft.

b. Los de vergelijking op; bepaal $\lim_{t\to\infty} x(t)$ als deze bestaat; hangt deze limiet van de beginvoorwaarden af?

c. Noem een aantal redenen waarom het model niet realistisch is; probeer het model te verbeteren.

d. Welk epidemisch verschijnsel korrespondeert met de vergelijking

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta x(t-1)(1-x(t-1))$$

6. We beschouwen een meer met konstante inhoud V km^3 waarin zich een hoeveelheid chemisch afval bevindt. Het afval is voortdurend gelijk verdeeld over het hele meer; op tijdstip t is de concentratie c(t) (dus $0 \leq c(t) \leq 1$). Veronderstel verder dat een vervuilde rivier in het meer uitkomt; de concentratie van chemisch afval in de rivier is konstant K en per tijdseenheid komt een hoeveelheid s rivierwater in het meer, terwijl eenzelfde hoeveelheid water per tijdseenheid uit het meer stroomt.

a. Stel de differentiaalvergelijking op die het gedrag van c(t) met de tijd beschrijft en los deze op; bereken $\lim_{t\to\infty} c(t)$.

b. Los dit probleem op indien bovendien per tijdseenheid een gewichtshoeveelheid chemisch afval G (de G van Geheim) direkt in het meer wordt geloosd; bereken $\lim_{t\to\infty} c(t)$ indien deze bestaat.

c. Indien de tijdseenheid 1 jaar is, laat dan $\frac{s}{V} = \frac{1}{10}$ een voorbeeld van snelle doorstroming zijn, $\frac{s}{V} = \frac{1}{100}$ een voorbeeld van langzame doorstroming. We nemen verder aan dat de vervuiling van de rivier beëindigd wordt en de lozingen gestaakt op het tijdstip dat $c(t) = 100\, c(0)$ (dus aanname $0 < c(0) < \frac{1}{100}$). Hoeveel tijd verloopt in beide gevallen voordat de concentratie c(t) weer de oorspronkelijke waarde c(0) bereikt.

Opmerking:

In dit model zijn een groot aantal faktoren verwaarloosd, zoals bijvoorbeeld absorptie, verdamping, lokale concentratie van verontreiniging enz.

Praktikum Toegepaste Analyse Inleiding differentiaalvergelijkingen

7. Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen door de punten (x_0,y_0) waarin existentie en eenduidigheid is gegarandeerd.

a. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x+1}$$

b. $$xy\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}(y^2+1)$$

8. Gegeven is de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = f(y,x)$$

op het gebied D in $\mathbb{R}^2$ (voor het gemak beschouwen we skalaire grootheden, de overgang op vektorfuncties geeft geen essentiële moeilijkheden) ; f(y,x) is kontinu in x en y op D en Lipschitz-kontinu in y (Lipschitzkonstante λ) ; verder geldt op D

$$|f(x,y)| \leqslant M \text{ (konstante)}$$

a. Als $\ulcorner x_0, y_0 \urcorner \in D$ en $y^{(n)}(x)$ de n-de approximatie voorstelt van de oplossing door $\ulcorner x_0,y_0 \urcorner$ volgens de methode van Picard-Lindelöf, bewijs dan dat geldt voor de oplossing y(x)

$$|y(x) - y^{(n)}(x)| \leqslant M\,\lambda^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\lambda|x-x_0|}$$

b. Beschouw als toepassing de vergelijking $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ met $x \in [0,\frac{1}{2}]$ en $\ulcorner x_0,y_0 \urcorner$. We willen de oplossing y(x) approximeren bijvoorbeeld z.d.d.

$$|y(x) - y^{(n)}(x)| < \varepsilon$$

Merk op dat we hiertoe D nader moeten bepalen, bijv. door $|y| < p$ (positieve konstante). Laat zien hoe voor gegeven ε, n afhangt van p ; substitueer ter illustaratie eens p = 1 en $\varepsilon = 10^{-3}$ en bereken dan n(e = 2.7183).

9. Gegeven is de vergelijking met beginwaarde

$$\frac{dy}{dx} = y + x, \; y(0) = 0$$

a. Benader de oplossing met behulp van de methode van suksessieve approximaties (iteratie-methode van Picard-Lindelöf). Beschouw de beginwaarde als 1e approximatie, ga tot en met $y^{(4)}$

b. Geef de exacte oplossing en vergelijk deze met de benaderde door Taylorreeksontwikkeling.

10. Gegeven is

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0, \; y(0) = 1$$

a. Benader de oplossing met behulp van de methode van suksessieve approximaties ; ga tot en met $y^{(3)}$

b. Geef de exacte oplossing en vergelijk deze met de benaderde door Taylorreeksontwikkeling.

Toegepaste Analyse. vervolg differentiaalvergelijkingen.

11. Beschouw de vergelijking van de harmonische oscillator:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0 \text{ met } \alpha > 0$$

$x(0) = x_0$; x is de plaatscoördinaat

$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$; $\frac{dx}{dt} = v$ is de snelheid.

a. De 1ste Picard geïtereerde wordt $x^{(1)} = x_0 = v^{(1)} = v_0$. Bepaal de n-de Picard geïtereerde $\ulcorner x^{(n)}, v^{(n)} \urcorner$.

b. Maak een schets in het fasevlak $\ulcorner x, v \urcorner$ van de banen corresponderend met: de exacte oplossing, de 2de, 3de en 4de Picard geïtereerden.

Merk op dat voor grote tijden ($t \to \infty$) de banen van de Picard geïtereerden willekeurig ver afwijken van de exacte baan.

12. Gegeven is de vergelijking $\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y}$
waarbij A een kontinue $n \times n$ matrix is, gedefinieerd op het segment I. Bewijs dat als voor een oplossing geldt

$$\bar{y}(x_0) = \bar{o}$$

met $x_0 \in I$, dat deze oplossing identiek nul is op I.

13. Bewijs de stelling gegeven op pag. 11 van het diktaat.

14. Teken het richtingsveld behorend bij de vergelijkingen, gegeven in vraagstuk 7.
Kontroleer de verkregen resultaten met behulp van de onder 7 uitgevoerde berekeningen.

15. Beschouw op [0,1] de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

met achtereenvolgens de randvoorwaarden

a. $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$

b. $y'(0) = \alpha$, $y'(1) = \beta$

c. $py(0) + qy'(0) = \alpha$, $ry(1) + sy'(1) = \beta$

Bestudeer de existentie- en eenduidigheid van de oplossingen van deze 3 randwaardeproblemen voor alle mogelijke reële waarden van de konstanten α, β, p, q, r, s.

Variationele problemen.

16. Beschouw de volgende funktionaal op $C[0,1]$:

$$J(y) = \int_0^1 y^2(x)dx)$$

a. Laat zien, dat er precies één $y_0 \in C[0,1]$ bestaat die J minimaliseert . Welke y_0 is dit ?

b. Laat zien, dat er géén funktie in $C[0,1]$ bestaat, die J minimaliseert en tevens voldoet aan de randvoorwaarde $y(0) = \alpha \neq 0$.

17. In het diktaat (pag.24) wordt de Euler-vergelijking afgeleid onder de veronderstelling

$$V \supset \tilde{C} = \{y \in C[a,b] \; ; \; y(a) = y(b) = 0\}.$$

Deze eis is (veel) te sterk.

Ga na, dat deze eis verzwakt kan worden tot bijvoorbeeld :

$V \subset \tilde{C}$ en V ligt in de sup-norm dicht in $\tilde{C}$.

Gegeven zij dat de gevallen $V = C^n[a,b]$; $n \geq 0$ hieronder vallen.

18. a. Laat zien dat :

$$||y|| = \{\int_0^1 [y^2 + \cancel{(y^2} + (y')^2]dx\}^{\frac{1}{2}}$$

een norm definieert op $C^{(1)}[0,1]$ afkomstig van een inprodukt

b. We zoeken het element $y \in [0,1]$ met de kleinste norm, zoals in a gedefinieerd, dat tevens voldoet aan :

$$y(0) = \alpha \; ; \; y(1) = \beta.$$

Los daartoe de Euler-vergelijking op.

Waarom is deze oplossing uniek?

Noem deze oplossing y_0.

c. Bewijs, dat er géén element $\tilde{y}_0 \in C^{(1)}[0,1]$ bestaat die aan de randvoorwaarden uit b voldoet en $||\tilde{y}_0|| \leq ||y_0||$.

19. Gegeven is de funktionaal J, die geminimaliseerd wordt op de ruimte V_1 ; gegeven is verder de funktionaal J_2 die geminimaliseerd wordt op de ruimte V_2. Nu geldt $V_1 \subset V_2$ en $J_1 = J_2$ op V_1.
Bewering : $y_0 \in V_1$ minimaliseert J_2 op $V_2 \Rightarrow y_0$ minimaliseert J_1 op V_1
Is deze bewering juist ?

20. Een klant bestelt op $t = 0$ bij een fabrikant een hoeveelheid goederen groot G. De goederen moeten worden geleverd op het tijdstip $t = T$ (> 0).
De fabrikant produceert deze goederen tussen $t = 0$ en $t = T$ en streeft daarbij naar minimalisatie van kosten.
Zij $y(t)$ de hoeveelheid tot op tijdstip t geproduceerde goederen.
Er zijn 2 soorten kosten :

i. produktiekosten : $K_1 = \int_0^T k_1(\frac{dy}{dt})\, dt$

ii. opslagkosten : $K_2 = \int_0^T k_2(y)\, dt$

Gegeven is :

$$k_1(x) = x + \tfrac{1}{2} x^2 \qquad \text{voor } x \geq 0$$
$$k_2(y) = y \qquad \text{voor } y \geq 0$$

a. Interpreteer de uitdrukkingen voor k_1 en k_2

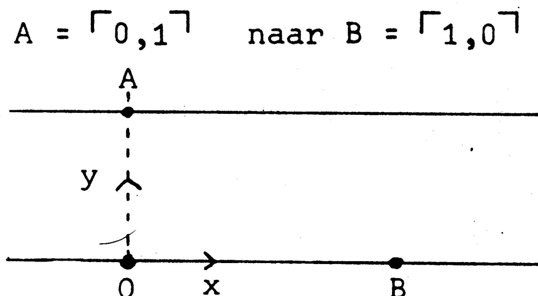
b. Stel een bijbehorend minimaliseringsprobleem op (funktionaal, randvoorwaarden, funktieruimte V).

c. Los dit probleem op door gebruik te maken van de Euler-vergelijking en opgave 19. Onder welke voorwaarde voor G en T levert deze oplossingsmethode een korrekt antwoord ?

d. Kunt u de oplossing van het probleem vinden, indien aan de laatste voorwaarde niet is voldaan ?

21. Een lichtstraal beweegt door een blok materiaal van

$A = \ulcorner 0,1 \urcorner$ naar $B = \ulcorner 1,0 \urcorner$



De brekings index van het materiaal is n,deze hangt i.h.a. af van de positie, dus $n = n(x,y)$. De snelheid van het licht is c/n. Het licht plant zich zodanig voort, dat de tijd benodigd om van A naar B te komen wordt geminimaliseerd (natuurwet).

a. Beschrijf de baan van de lichtstraal door : $\ulcorner x,y(x) \urcorner$, $x \in [0,1]$

Laat zien, dat dit probleem zich laat formuleren als :

minimaliseer : $\frac{1}{c} \int_0^1 n(x,y) \, . \, \sqrt{1+(y')^2} \, dx$

randvoorwaarden : $y(0) = 1$; $y(1) = 0$

b. Geef de oplossing als n constant is.

c. Geef de oplossing als $n = \begin{matrix} n_0 & \text{voor } x < \frac{1}{2} \\ n_1 & \text{voor } x > \frac{1}{2} \end{matrix}$

met constanten n_0 en n_1 .

Maak hiervan een schets.

Ziet u de"wet van Snellius" : $n_0 \sin(i) = n_1 \sin(r)$?

d. Geef de oplossing als $n = \alpha + \beta x$

$\alpha \geq 1$; $\alpha + \beta \geq 1$

e. Geef de oplossing als $n = \gamma + \delta y$

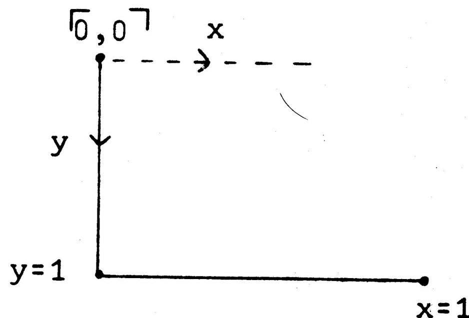
$\gamma \geq 1$; $\gamma + \delta \geq 1$

Hint : beschouw niet $y(x)$ maar $x(y)$!

22. Het probleem op blz. 19 van het diktaat luidt : minimaliseer

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\, dx$$

$y(0) = 0$; $y(1) = 1$



a. Leid de vorm van dit minimaliseringsprobleem af

b. Bereken de oplossing

Hint : zie vr. 21e

23. Beschouw een kontinu differentieerbare $f(x)$ in $\mathbb{R}$, periodiek met periode 2π. We willen $f(x)$ op $[0,2\pi]$ zo goed mogelijk benaderen met een funktie van de gedaante

$$y(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \sin x$$

a. Kies als norm

$$||y|| = [\int_0^{2\pi} y^2(x)dx\ ]^{\frac{1}{2}},$$

formuleer een minimaliseringsprobleem en los dit op.

b. Doe hetzelfde met als norm

$$||y|| = [\int_0^{2\pi} (y^2(x) + y'^2(x))\, dx\,]^{\frac{1}{2}}$$

c. Wat vindt u als u f in de norm uit opg. a zo goed mogelijk wil benaderen met een functie van de gedaante :

$$y(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \{\lambda_k \cos(kx) + \bar{\lambda}_k \sin(kx)\}$$

Merk op, dat het antwoord niet van n afhangt.

De gevonden λ_0, λ_k, $\bar{\lambda}_k$ heten Fouriercoefficiënten van f.

24. Beschouw de vgl. + randvoorw. :

$$\begin{cases} \ddot{x} + s\,x = f(t) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{met } s \in \mathbb{R}.$$

a. Laat zien, dat deze vergelijking ontstaat als Euler-vergelijking van het funktionaal :

$$J(x) = \int_0^1 \{ -\tfrac{1}{2}(\dot{x})^2 + \tfrac{s}{2}x^2 - f(t).x \}\, dt$$

Dit funktionaal wordt echter niet noodzakelijk geminimaliseerd of gemaximaliseerd !

Geef bijv. in het geval $f \equiv 0$ en $s > \pi^2$

(i) een rij funkties z_n met $z_n(0) = z_n(1) = 0$ en $J(z_n) \to \infty$ voor $n \to \infty$

(ii) een rij funkties $\tilde{z}_n$ met $\tilde{z}_n(0) = \tilde{z}_n(1) = 0$ en $J(\tilde{z}_n) \to -\infty$ voor $n \to \infty$.

Gegeven zij nu, dat $s \neq k^2.\pi^2$ voor $k = 1,2,3,\ldots$.

b. Voer het procédé van Ritz-Galerkin uit met als basis $\phi_k = \sin(k\pi t$

D.w.z. stel inde n-de iteratieslag $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$

en bepaal de optimale set $\{ a_k^{(n)}\ ;\ k = 1,\ldots, n \}$ voor $J(x^{(n)})$.

Merk op dat in dit speciale geval $a_k^{(n)}$ niet van n afhangt.

c. Gegeven zij $f(0) = f(1) = 0$ en f ∞ - diff.

Laat zien, dat de reeks $x^{(n)}$ convergeert in de supnorm naar een funktie x_∞.

Geef een schatting van $\max_{t\in[0,1]} |x^{(n)} - x_\infty|$, dus van de convergentie-snelheid.

Laat m.b.v. de identiteit :

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi t). \quad \{ \int_0^1 \sin(k\pi\tau) \ f(\tau)\, d\tau \} = f(t)$$

zien, dat x_∞ inderdaad de gevraagde oplossing van de vgl. + randvoorw. is.

d. Zij $s = k_0^2 . \pi^2$ met $k_0 \in \mathbb{N}$. Aan welke voorwaarde moet f voldoen opdat b en c "uitgevoerd" kunnen worden ?

25. Beschouw het probleem :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda\, f(t)\, x = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

met $f(t) > 0$ en $f \in C^\infty [0,1]$.

Dit probleem heeft uiteraard altijd als triviale oplossing $x \equiv 0$.

Als de vgl. + randvoorw. een niet triviale oplossing $x = \psi_n(t)$ bezit voor de waarde $\lambda = \lambda_n$, dan heet λ_n een eigenwaarde en ψ_n de bijbehorende eigenfunktie.

Gegeven zij, dat een vgl. + randvoorw. zoals boven een aftelbare reeks reële eigenwaarden $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ bezit met $\lambda_n \to \infty$ voor $n \to \infty$.

a. Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenfunkties als $f \equiv 1$.

b. We zullen proberen een benaderinsprocédé van de eigenwaarden in het algemene geval op te zetten.

Geef daartoe een variationele formulering van het probleem en tevens het stelsel vergelijkingen waaraan de optimale

set { $a_k^{(n)}$; k = 1,..., n } moet voldoen bij het Ritz-Galerkin procédé met als basis een stelsel { ϕ_k ; k = 1,2..... } en als n-de iterand $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$, waarbij ϕ_k van de randvoorwaarden voldoet.

Dit stelsel heeft steeds de triviale oplossing $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Voor speciale waarden van λ echter heeft dit stelsel ook niet triviale oplossingen .

Laat zien dat deze waarden $\lambda_k^{(n)}$ volgen uit de vgl.

$$\det [\ M_1^{(n)} - \lambda\ M_2^{(n)}\ ] = 0$$

met $M_1^{(n)}$ en $M_2^{(n)}$ n x n - matrices van de volgende gedaante :

$$M_1^{(n)}(i,j) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{\phi}_i\ \dot{\phi}_j\ dt & \text{voor } i \neq j \\ \int_0^1 (\dot{\phi}_i)^2\ dt & \text{voor } i = j \end{cases}$$

$$M_1^{(n)}(i,j) = \begin{cases} \int_0^1 f(t)\ \phi_i\ \phi_j\ dt & \text{voor } i \neq j \\ \int_0^1 f(t)\ (\phi_i)^2\ dt & \text{voor } i = j \end{cases}$$

Deze vgl. voor λ heeft dus hooguit n opl.

Het valt te verwachten, dat $\lambda_k^{(n)}$ voor n "groot" onder bepaalde omstandigheden een benadering vormt van λ_k.

Hoe vindt u een vermoedelijke benadering $\psi_k^{(n)}$ van de bijbehorende eigenfunktie ?

c. Voer dit procédé uit voor n = 1,2 in het geval dat $f \equiv 1$ en

$$\phi_k = \prod_{i=0}^{k} \left(t - \frac{i}{k}\right)$$

Vergelijk uw antwoorden met de exacte λ_1, ψ_1, en λ_2, ψ_2 uit onderdeel a.

Asymptotiek.

26. Gegeven zij een continue funktie ψ op (0,1), die voldoet aan $\psi > 0$. We beschouwen het gedrag van ψ voor $t \to 0$.

Verifieer de volgende vergelijkingen :

a. $\psi = 0(1) \Rightarrow \psi^2 = 0(\psi)$

b. $1 = 0(\psi) \Rightarrow \psi = 0(\psi^2)$

c. $\psi = 0(1) \Rightarrow \exp(-\psi^{-1}) = 0(\psi)$

27. We beschouwen weer het gedrag voor $t \to 0$ van continue funkties op (0,1). Definieer het ordesymbool 0_S als volgt :

$$\psi = 0_S(\phi) \Leftrightarrow \{\psi = 0(\phi) \text{ én } \phi = 0(\psi)\}$$

a. Laat zien dat :

$$\psi = 0_S(\phi) \Leftrightarrow \exists\, A,B,\overline{0} > 0 \text{ zodat op } (0,\delta)\text{: } A.|\phi| \leqslant |\psi| \leqslant B.|\phi|$$

Toon verder aan, dat :

b. $\psi = 0(1) \Rightarrow (1 \pm \psi)^{-1} = 1 + 0_S(\psi)$

c. $1 = 0(\psi) \quad (1 \pm \psi)^{-1} = \pm\, \psi^{-1} + 0_S(\psi^{-2})$

28. De beschouwde situatie situatie zij dezelfde als in opg.27

a. Bewijs, dat de ordening gedefinieerd door het symbool 0 niet totaal is, d.w.z. vind 2 funkties ψ en ϕ waarvoor beide uitspraken : $\psi = 0(\phi)$ en $\phi = 0(\psi)$ ongeldig zijn.

b. Bewijs, dat het symbool 0_S een equivalentie relatie definieert.

29. Gegeven zij een complexe funktie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ welke analytisch is in een omgeving van de oorsprong. De machtreeksontwikkeling : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n$ heeft dus een convergentiestraal $\rho > 0$.

We zijn geïnteresseerd in het gedrag voor $z \to 0$.

Bewijs

a. de rij $\{z^n\}$ is asymptotisch geordend

b. de "eindige Taylorontwikkeling" $F_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.z^n$ stelt een asymptotische ontwikkeling van f voor.

c. $f - F_m = O(z^{m+1})$.

Als $f^{(m+1)}(0) \neq 0$, dan $f - F_m = O_S(z^{m+1})$,

als $f^{(m+1)}(0) = 0$, dan zelfs $f - F_m = o(z^{m+1})$.

d. $f(0) = 0 \Rightarrow f = O(f')$.

30. Bereken een asymptotische ontwikkeling voor $t \to \infty$ naar machten van 1/t voor de funktie :

$$\phi = \int_1^t (1 + t.z^s)^{-1}.\, dz \text{ met } s > 1.$$

Ga na, dat in dit geval de asymptotische ontwikkeling puntsgewijs convergent is en zelfs convergeer naar ϕ.

31. Definieer x_1 en x_2 als de negatieve, resp. positieve wortel van de vierkantsvergelijking :

$$x^2 - t.\, x - 1 = 0 \;;\; t > 0.$$

Laat zien, dat voor $t \to \infty$: $x_1 = -t^{-1} + O(1/t^3)$

$x_2 = t + O(1/t)$

32. Beschouw de transcendente vergelijking

$$e^x = t\, x \;;\; t > E.$$

a. Laat zien aan de hand van een tekening, dat de vergelijking twee reële wortels x_1 en x_2 heeft welke voor $t \to \infty$ voldoen aan resp. $x_1 \to 0$; $x_2 \to \infty$.

b. Bewijs, dat : $(t-1) - \sqrt{(t-1)^2-2} \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}\{(t-1) - \sqrt{(t-1)^2-4}\}$ voor t groot genoeg.

Dus : $x_1 = (t-1)^{-1} + O(t^{-3})$ voor $t \to \infty$

c. Stel $x_2 = \log t + y$ (waarom?). Leid een vergelijking voor y af.

Toon aan, dat : $x_2 = \log t . \{1 + O(\frac{\log \log t}{\log t})\}$ voor $t \to \infty$

Let wel : de fout in de schatting $x_2 \approx \log(t)$ gaat voor $t \to \infty$ dus absoluut genomen $\to \infty$, doch relatief genomen $\to 0$.

d. Toon aan , dat : $x_2 = \log t + \log \log t + O(\frac{\log \log t}{\log t})$.

Merk op dat in deze benadering de absolute fout $\to 0$ gaat voor $t \to \infty$!

33. In het diktaat werd de volgende asymptotische ontwikkeling voor $t \to \infty$ afgeleid

$$\int_0^\infty e^{-tz} . \frac{dz}{z+1} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}.(k-1)!.t^{-k} + R_m$$

waarbij R_m voldoet aan : $|R_m| \leq m!.t^{-(m+1)}$ (*)

Bereken bij vaste t bij benadering het optimaal aantal termen $\mu(t)$, dat men in de ontwikkeling mee moet nemen opdat $R_m(t)$ geminimaliseerd wordt en geef aan hoe groot R_m wordt bij dit optimaal aantal termen in de ontwikkeling.

Hint : 1. gebruik de bovengrens voor R_m zoals gegeven in (*) en benader hierin m! met de formule van Stirling :

$$m! \approx \sqrt{2\pi m}.\ m^m.e^{-m}$$

òf

2. Beschouw $|R_{m+1}| / |R_m|$

34. Beschouw $\phi(t) = \int_0^\infty e^{-t\ f(x)} . dx$; $t > 0$ waarbij f een ∞-diff. funktie is op $[0,\infty)$ met $f' \geq \delta > 0$.

a. Laat zien, dat de integraal, die $\phi(t)$ definieert, bestaat.

b. Vind een asymptotische benadering $\tilde{\phi}(t)$ voor $\phi(t)$ als $t \to \infty$ zodanig dat de relatieve fout $O(t^{-2})$ is.

35. Een stochastische variabele $\underline{x}$ die waarden aanneemt in $\mathbb{R}$ heet standaard normaal verdeeld als de kansdichtheid gegeven wordt door:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-x^2/2}$$

De kans dat $\underline{x} \geq t$ is dus:

$$p\{\underline{x} \geq t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx$$

Bereken een asymptotische benadering voor $t \to \infty$ van deze kans met een relatieve fout $O(t^{-4})$.

36. Beschouw een ∞-diff. funktie f van $[0,1]$ in $\mathbb{R}$.

a. Laat zien dat f een Fourier ontwikkeling bezit van de vorm:

$$f(x) = a_o + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,\{a_n \cdot e^{2\pi\, in\, x}\}$$

met $a_o = \int_0^1 f(x)\, dx$

$$a_n = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi\, in\, x} \cdot dx$$

b. Geef een asymptotische ontwikkeling van a(n) voor $n \to \infty$

c. Onder welke voorwaarde(n) geldt:

$a(n) = O_s(n^{-k})$ voor $n \to \infty$

met $k \in \mathbb{N}$?

d. Bewijs de volgende schatting :

$f \in C^{(2)}[0,1]$ en $f(0) = f(1) \Rightarrow$

$$\max_{[0,1]} |f(x) - \{a_o + 2 \,.\, \sum_1^N \mathrm{Re}(a_n \,.\, e^{2\pi\, in\, x})\}| \leq \frac{C}{N}\,.$$

met $C = \dfrac{1}{2\pi^2} \,.\, \{|f'(0)| + |f'(1)| + \max_{[0,1]} |f''(x)|\}.$

1e deeltentamen Toegepaste Analyse datum 2 november ; tijd 10-13 uur

Opgave 1.

Beschouw de volgende differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde :

(i) $\frac{dx}{dt} = t^{-1} . x + w$

(ii) $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$

met $w \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke punten $\ulcorner x_0, t_0 \urcorner$ is er volgens een u bekende existentie en eenduidigheidsstelling een interval $t_1 < t_0 < t_2$, waarop een unieke oplossing bestaat van (i) + (ii).

b. Bereken de oplossing $x_\alpha(t)$ van vergelijking (i) welke voldoet aan $x_\alpha(1) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Onderzoek het gedrag van deze oplossing voor $t \downarrow 0$.

Bereken met name $\lim_{t \downarrow 0} x_\alpha(t)$ als deze limiet bestaat.

c. Ga voor elke $\beta \in \mathbb{R}$ na òf er een oplossing van vergelijking (i) bestaat welke tevens voldoet aan $x(0) = \beta$ en zo ja, hoeveel.

Opgave 2

We zoeken een funktie u_0 welke de volgende funktionaal J minimaliseert :

$$J(u) = \int_0^1 e^t . \left(\frac{du}{dt}\right)^2 . dt$$

en tevens voldoet aan de randvoorwaarden :

$$u(0) = 0 \; ; \; u(1) = 1$$

a. Laat zien door beschouwing van de bijbehorende Eulervergelijking dat er in $C^{(2)}[0,1]$ hooguit één u_1 bestaat welke J minimaliseert en aan de randvoorwaarden voldoet.
Bereken deze kandidaat u_1

b. Laat zien, dat er geen $\tilde{u} \neq u_1$ in $C^{(1)}[0,1]$ is waarvoor $J(\tilde{u}) \leq J(u_1)$.
Stel daartoe $\tilde{u} = u_1 + \eta$ en schat

$$J(u_1+\eta) = J(u_1) + J(\eta) + 2.\int_0^1 e^t.\frac{du_1}{dt}.\frac{d\eta}{dt}.dt$$

Opgave 3

Gegeven zij :

$$I(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+z^2)^{-1}.\,e^{-\frac{1}{2}tz^2}.\,dz$$

We zijn geïnteresseerd in het gedrag voor $t \to \infty$ van $I(t)$.

a. Bereken een asymptotische ontwikkeling van $I(t)$ voor $t \to \infty$ naar machten van t^{-1}.
Ontwikkel daartoe $(1+z^2)^{-1}$ in een Taylorreeks rond $z = 0$ en gebruik de gegevens onderaan deze opgave.
Noem de benadering die u krijgt door de termen tot en met $O(z^{2n})$ van deze Taylorreeks mee te nemen : $I_n(t)$.
Laat zien dat er sprake is van een divergente ontwikkeling voor vaste t.

b. Toon aan, dat :

$$I(t) - I_n(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.\int_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}.\,\frac{z^{2n+2}}{1+z^2}.\,e^{-\frac{1}{2}tz^2}.\,dz$$

Vind een schatting van de gedaante :

(*) $|I(t) - I_n(t)| \leq C_n.\,t^{-(n+1)} = R_n(t)$

waarin u zelf C_n heeft berekend.

Ga bij gegeven $t_0 > 0$ na voor welke waarde van n $R_n(t_0)$ minimaal wordt.

Beschouw daartoe $R_{n+1}(t_0)/R_n(t_0)$.

U mag gebruiken, dat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n} . e^{-\frac{1}{2}z^2} . dz = (2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n-2} . e^{-\frac{1}{2}z^2} . dz$$

$$= (2n-1).(2n-3). \ldots . 1. \sqrt{2\pi} \text{ voor } n \geqslant 1.$$